数值模拟

邸阮　13552709129　　助教：彭浪

Grading：

Quiz	10%
Assignment	20%
Midterm	20–30%
Final	40–50%

References：1、油气藏数值模拟基本原理，张烈辉.

2、Aziz

第一章 引论

· 多孔介质　多孔介质中的孔隙几何形态很难描述，采用等效连续介质的宏观方法来研究。

油藏：单一圈闭中，具有同一压力系统的油气聚集。

- anticline 背斜
- stratigraphic trap 地层圈闭
- fault 断层.

第二章 油气藏流体的化学性质和组成.

相对密度 d_4^{20} ：1atm、20°C 时原油密度与 1atm、4°C 时水密度的比。

$1P = 100\,cP = 0.1\,Pa \cdot S$

相对密度 γ_o ：1atm、15.6°C 时原油密度与 1atm、4°C 时水密度的比。

第三章 储层流体的物性

体系(系统)：物质整体

相：包括油相、气相、水相

组分(拟组分)：混合物中所有相同类的分子的统称。

- 在三维PVT相图上，纯组分的状态只可能处于相曲面上。(P,V,T不相互独立)

第一节 天然气的物性

定义：——

组成：——

质量分数 y_i：---

体积分数 y_i：---

重量比 g_i：---

天然气的分类：气田气、油田气、凝析气田气；湿气、贫气、干气；净气、酸气

天然气的视分子量 $M=\sum_i y_i M_i$

天然气的比重S：同温同压下，天然气与空气的重度比。$S \equiv \frac{\gamma_{天然气}}{\gamma_{空气}}$ (一般小于1.0)

相对密度 γ_g：标准状况下(20℃, 1atm)，天然气与干空气的密度比。$\gamma_g=\frac{M}{29}$

天然气的状态方程(EOR)： ($\gamma_g=S(20℃, 1atm)$)

$$PV=nRT$$

$$\left(P+\frac{n^2a}{V^2}\right)(V-nb)=nRT$$ (压力比理想态小，体积比理想态大)

修正法：$PV=nRT\cdot Z$

其中Z是压缩因子。

多组分气体Z的计算：(对应状态原理)

对比压力 P_r：$P_r \equiv \frac{P}{P_c}$ —临界压力

对比温度 T_r：$T_r \equiv \frac{T}{T_c}$ —临界温度

对应状态：如果两种气体的对比压力和对比温度相同，则这两种气体处于对应状态。

对应状态原理：如果两种气体处于对应状态，则这两种气体的所有内涵性质(如Z, μ)相同。

对应状态原理证明：

范德瓦耳斯状态方程，P-V图中，临界点为拐点。

$$\Rightarrow \left(P_r+\frac{3}{V_r^2}\right)\left(V_r-\frac{1}{3}\right)=\frac{8}{3}T_r$$

即以 P_r, V_r, T_r 为状态参数时，范德瓦耳斯状态方程与气体种类无关。

$$Z = Z_c \cdot \frac{P_r V_r}{T_r}$$，其中 $Z_c=\frac{3}{8}$，为临界压缩因子。

从而，两种气体 P_r, T_r 相同时，Z 相同。

然而实际上 Z_c 对 $\frac{3}{8}$ 的偏差也较大，所以各气体的 Z 图版也是有意义的。

天然气 Z 的求解步骤：

1° 依据组成求 P_c, T_c　（$P_c = \sum_i y_i P_{ci}$）

2° 求 T_r, P_r

3° 查天然气 Z 图版。

天然气压缩因子的修正（略）。

天然气的体积系数 B_g：$B_g \equiv \frac{V_{RC}}{V_{STC}}$　（STC：20℃，$\overset{0.1013\,MPa}{1\,atm}$）。

一般情况下 $B_g \ll 1$.

天然气的压缩系数 C_g：$C_g \equiv -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T$

对单组分气体，$pV = ZnRT$，可得

$$C_g = \frac{1}{p} - \frac{1}{Z}\left(\frac{\partial Z}{\partial p}\right)_T$$

对多组分气体，

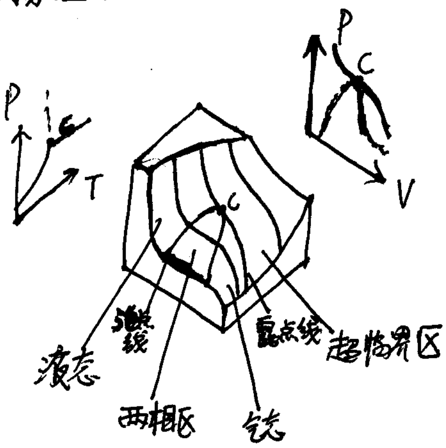
$$C_g = \frac{1}{P_c}\left(\frac{1}{P_r} - \frac{1}{Z}\left(\frac{\partial Z}{\partial P_r}\right)_T\right) \equiv \frac{C_{gr}}{P_c}$$

天然气的粘度：1° 低压 $\left\{\begin{array}{l}\text{公式计算法}\\ \text{查图法}\end{array}\right.$

2° 高压

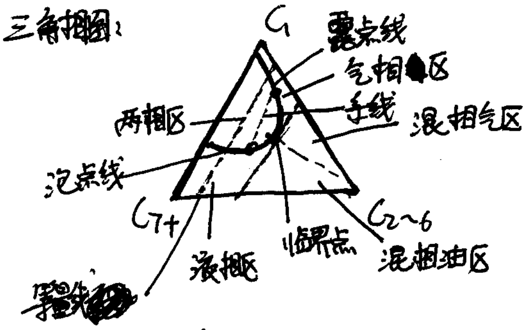
第二节 地层原油的物性

三维相图:



在P-T图上，两相区投影成一条饱和蒸气压线。

三角相图:



三角相图表示压力、温度一定时，气体组成对相态的影响。

等量线：平行于三角形一边，某一组成在混合物中含量不变的线。

系线

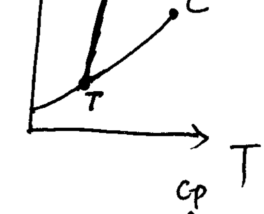
混相气区与混相油区构成超临界区。

单组分体系的相态特征:

两点：临界点，三相点

三线：饱和蒸气压线、熔点线、升华线

三区：气相区、液相区、固相区

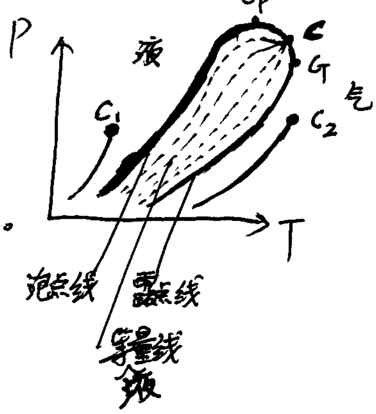


双组分体系的相态特征

Cp点压力为临界凝析压力；

CT点温度为临界凝析温度。

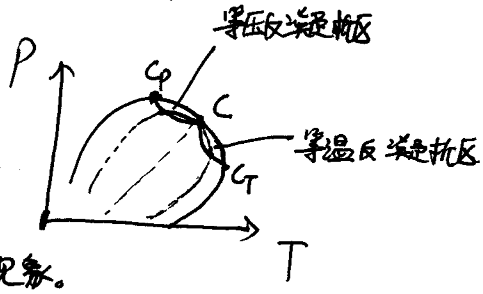
C点是临界点，是所有等液量线的交点。



多组分体系的相态特征

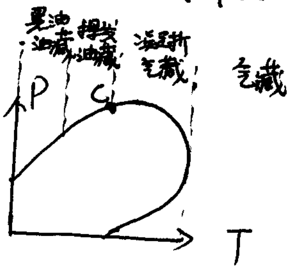
C_P：临界凝析压力点

C_T：临界凝析温度点

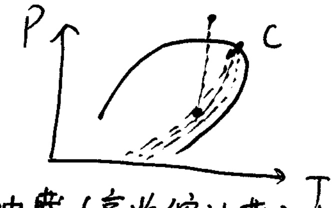


分子动力学观点可以解释反凝析现象。

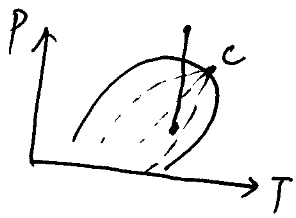
油气藏类型



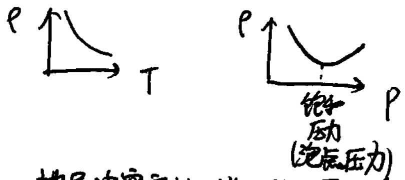
常规重质油藏（低收缩油藏）相图



轻质油藏（高收缩油藏）相图



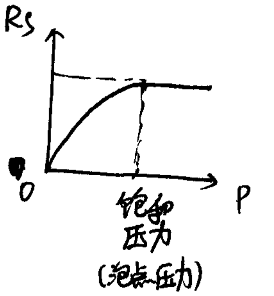
- 地层油密度



地层油密度比地面脱气原油密度小一点，因为有溶解气。

相对密度 d_4^{20}

- 地层油溶解气油比 R_s：单位体积标况下原油在油藏条件下溶解的天然气在标况下的体积



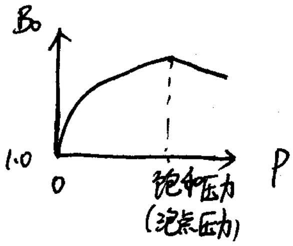
$$R_s \equiv \left[\frac{V_{dg}}{V_o}\right]_{STC}$$

dg — 溶解气

• 原油地层体积系数 $B_o \equiv \dfrac{(V_o+V_{dg})_{RC}}{(V_o)_{STC}}$

— 这个定义与天然气的地层体积系数不一样.

— 通常 $B_o>1$



一些计算式:

$$(\rho_o)_{RC} = \frac{1}{B_o}\left[(\rho_o)_{STC} + R_s(\rho_g)_{STC}\right]$$

$$(\rho_g)_{RC} = \frac{(\rho_g)_{STC}}{B_g}$$

$$(\overline{\rho}_o)_{RC} = \frac{(\rho_o)_{STC}}{B_o}$$

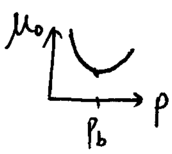
$$(\overline{\rho}_{dg})_{RC} = \frac{R_s(\rho_g)_{STC}}{B_o}$$

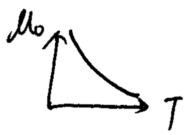
• 地层油的压缩系数 $C_o \equiv -\dfrac{1}{V}\left(\dfrac{\partial V}{\partial P}\right)_T = \dfrac{1}{\rho}\left(\dfrac{\partial \rho}{\partial P}\right)_T$

(在 C_o 较小,且变化不大时,近似的有 $\rho=\rho_0[1+C_o(P-P_0)]$)

• 地层油的粘度

粘度范围: $0.1\,mPa\cdot s \sim 10^4\,mPa\cdot s$





第三节 地层水的高压物性.

矿化度: 地层水的无机盐含量.

硬度: 地层水中 Ca^{2+}、Mg^{2+} 离子的含量.

天然气在地层水中的溶解度

第四章 基本流动方程的建立

数学模型分类：
- 空间维度：一维、二维、三维
- 相数目：单相、两相、三相
- 组分数目：单组分、两组分、…，N组分
- 岩石类型：单重介质（砂岩）、双重介质、多重介质（碳酸盐岩）

数学模型的构成：

- 运动方程
  - 达西定律
  - 非线性二项式
- 状态方程
  - 流体 0
  - 孔隙
- 辅助方程
  - 流动 0
  - 参量 0
  - 化学
  - 物理 0

$\Rightarrow$ 质量守恒方程、能量守恒方程 $\Rightarrow$ 渗流偏微分方程组

第一节 基本控制方程

1.1 质量守恒方程

$$-\nabla\cdot(\rho\vec{q}) + \rho Q = \frac{\partial(\phi\rho)}{\partial t}$$

1.2 渗流定律（运动方程）

达西定律：$\vec{v} = -\frac{k}{\mu}(\nabla p - \rho g\nabla D)$

$$\vec{V}_p = -\frac{k\cdot k_{rp}}{\mu_p}(\nabla P_p - \rho_p g\nabla D) \qquad (p=o,w,g)$$

非达西定律 1°低速流定律

$$\vec{v} = \begin{cases} -\frac{k}{\mu}\left(1-\frac{\lambda_E}{|\nabla\Phi|}\right)\nabla\Phi, & |\nabla\Phi| > \lambda_E \\ 0, & |\nabla\Phi| \le \lambda_E \end{cases}$$

2°高速流定律（Forchheimer定律）

$$\nabla\Phi = \frac{\mu}{k}v + \beta\rho v^2$$

$$\nabla\Phi = \frac{\mu_p}{k\cdot k_{rp}}V_p + \beta_p\rho_p V_p^2$$

1.3 状态方程和辅助方程

饱和度约束 S

毛管压力函数 P_c

相对渗透率函数 K_r

PVT数据 (B, μ, ϕ)

第二节 单相流的数学模型

2.1 可压缩流体（气体）

由质量守恒方程 $-\nabla\cdot(\rho\vec{u}) + q = \frac{\partial(\phi\rho)}{\partial t}$ ①

由达西定律 $\vec{u} = -\frac{\vec{k}}{\mu_g}\cdot(\nabla p - \rho g\nabla D)$ ②

联立①,②式，且不考虑源/汇项，得

$$\nabla\cdot\left[\rho\frac{\vec{k}}{\mu_g}\cdot(\nabla p - \rho g\nabla D)\right] = \frac{\partial}{\partial t}(\phi\rho)$$

由于是气体，忽略重力对流动势的影响，得

$$\nabla\cdot\left(\rho\frac{\vec{k}}{\mu_g}\cdot\nabla p\right) = \frac{\partial}{\partial t}(\phi\rho)$$

由于 $\rho = \frac{\rho_{sc}}{B_g}$，得

$$\nabla\cdot\left(\frac{\vec{k}}{\mu_g B_g}\cdot\nabla p\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\phi}{B_g}\right) \quad ③$$

由气体的状态方程 $pV = znRT$ 得

$$B_g = \frac{zTp_{sc}}{T_{sc}p}$$

代入③得

$$\nabla\cdot\left(\frac{\vec{k}p}{\mu_g zT}\cdot\nabla p\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\phi p}{zT}\right)$$

假设生产过程中流体温度不变，即 $T = const$.

再假设地层不可压，即 $\phi = const$、

再假设气体的 $z\mu_g = const$、，

再假设地层均质且各向同性，可得

$$\frac{k}{\mu_g z}\nabla\cdot(p\nabla p) = \phi\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{p}{z}\right)$$

即有 $\frac{k}{\mu g z}\cdot\frac{1}{2}\nabla^2 p^2 = \phi\left(\frac{1}{z}\frac{\partial p}{\partial t} - \frac{p}{z^2}\frac{\partial z}{\partial t}\right)$

~~即有~~ $\cancel{\nabla^2 p^2 = \frac{2\phi\mu g}{k}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial p}\right)}$

$$= \frac{\phi}{z}\left(1 - \frac{p}{z}\frac{\partial z}{\partial p}\right)\frac{\partial p}{\partial t}$$

$$= \frac{\phi}{z}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial p}\right)\cdot\frac{1}{2}\frac{\partial p^2}{\partial t}$$

由于气体压缩系数 $C_g = \frac{1}{p} - \frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial p}$，所以

$$\nabla^2 p^2 = \frac{\mu_g \phi}{k} C_g \frac{\partial p^2}{\partial t}$$

这就是相应的控制方程.

2-2、不可压缩流体

由质量守恒方程 $-\nabla\cdot(\rho\vec{u}) + q = \frac{\partial(\phi\rho)}{\partial t}$ ①

由达西定律 $\vec{u} = -\frac{k}{\mu}\cdot(\nabla p - \rho g \nabla D)$ ②

联立①、②式，得

$$\nabla\cdot\left[\rho\frac{\vec{k}}{\mu}\cdot(\nabla p - \rho g\nabla D)\right] + q = \frac{\partial(\phi\rho)}{\partial t}$$

假设流体、岩石不可压，$\phi = Const.$，$\rho = Const$，可得

$$\nabla\cdot\left[\rho\frac{\vec{k}}{\mu}\cdot(\nabla p - \rho g\nabla D)\right] + q = 0$$

忽略源汇项及重力，即 $q=0$，"$g=0$"，可得

$$\nabla\cdot\left(\frac{\vec{k}}{\mu}\cdot\nabla p\right) = 0$$

这是一个椭圆型偏微分方程。

假设地层均质，各向同性，

再假设流体粘度 $\mu = Const$. 可得

$$\nabla^2 p = 0$$

这是 Laplace 方程.

2-3 微可压缩流体

由质量守恒方程 $-\nabla\cdot(\rho\vec{u})+q=\dfrac{\partial(\phi\rho)}{\partial t}$ ①

由达西定律 $\vec{u}=-\dfrac{\vec{k}}{\mu}\cdot(\nabla p-\rho g\nabla D)$ ②

联立①、②式可得

$$\nabla\cdot\left[\rho\frac{\vec{k}}{\mu}\cdot(\nabla p-\rho g\nabla D)\right]+q=\frac{\partial(\phi\rho)}{\partial t}$$

假设流体微可压，$\dfrac{\partial\rho}{\partial p}=\rho C$ 且 $C=Const.$

再假设岩石不可压，$\phi=Const.$ 可得

$$\nabla\cdot\left[\rho\frac{\vec{k}}{\mu}\cdot(\nabla p-\rho g\nabla D)\right]+q=\phi\rho C\frac{\partial p}{\partial t}$$

由 $\rho=\dfrac{\rho_{sc}}{B}$ 可得

$$\nabla\cdot\left[\frac{\vec{k}}{\mu B}\cdot(\nabla p-\rho g\nabla D)\right]+q_v=\frac{\phi C}{B}\frac{\partial p}{\partial t}$$

忽略源汇项，$q_v=0$

再忽略重力影响，"$g=0$"

假设地层均质，各向同性 $k=Const.$ scalar

再假设 $\mu=const$，$B=const.$ [很奇怪的假设，与微可压冲突.]

可得

$$\nabla^2 p=\frac{\phi C\mu}{k}\frac{\partial p}{\partial t}$$

这是热传导方程。

第二节 多相流的数学模型

3.1 不混溶两相流体

质量守恒方程（各相）：$-\nabla\cdot(\rho_l\vec{V}_l)+q_l=\dfrac{\partial(\phi\rho_l S_l)}{\partial t}$

达西定律（各相）：$\vec{V}_l=-\dfrac{\vec{k}k_{rl}}{\mu_l}\cdot(\nabla p_l-\rho_l g\nabla D)$

联立得，（这里分相考虑压强，因为存在毛管力）

$$\nabla\cdot\left[\rho_l\frac{\vec{k}k_{rl}}{\mu_l}\cdot(\nabla p_l-\rho_l g\nabla D)\right]+q_l=\frac{\partial(\phi\rho_l S_l)}{\partial t}$$

由 $q_{lv}=\dfrac{q_l}{\rho_{l,sc}}$，$\rho_l=\dfrac{\rho_{l,sc}}{B_l}$ 可得

$$\nabla\cdot\left[\frac{\vec{k}k_{rl}}{\mu_l B_l}\cdot(\nabla p_l-\rho_l g\nabla D)\right]+q_{lv}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\phi S_l}{B_l}\right)$$

系统中各相均满足上述控制方程。

辅助方程：

$$\begin{cases}S_o+S_w=1\\ p_{cgw}=p_g-p_w=f(S_g)\end{cases}$$

3.2 油气两相 干气模型

假设气溶解于油，油不溶解于气。

以 $\bar{g},\bar{o}$ 表示气组分，油组分；以 g,o 表示气相，油相。

ρ_g,ρ_o 表示地层条件下气相、油相的密度

C 表示质量分数.

由质量守恒定律（各组分）

$$\begin{cases}-\nabla\cdot\left[\rho_g\vec{V}_g+C_{\bar{g},o}\rho_o\vec{V}_o\right]+q_{\bar{g},g}+q_{\bar{g},o}=\dfrac{\partial}{\partial t}\left[\phi(\rho_g S_g+C_{\bar{g},o}\rho_o S_o)\right]\\ -\nabla\cdot\left[C_{\bar{o},o}\rho_o\vec{V}_o\right]+q_{\bar{o},o}=\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\phi C_{\bar{o},o}\rho_o S_o\right)\end{cases}$$

由达西定律（各组分）

$$\begin{cases}\vec{V}_g=-\dfrac{\vec{k}k_{rg}}{\mu_g}\cdot(\nabla p_g-\rho_g g\nabla D)\\ \vec{V}_o=-\dfrac{\vec{k}k_{ro}}{\mu_o}\cdot(\nabla p_o-\rho_o g\nabla D)\end{cases}$$

（这里分相考虑压强，因为存在毛管力）

联立得

$$\begin{cases}\nabla\cdot\left[\rho_g \dfrac{\vec{k}k_{rg}}{\mu_g}\cdot(\nabla p_g-\rho_g g\nabla D)+C_{\bar{g},o}\,\rho_o\dfrac{\vec{k}k_{ro}}{\mu_o}\cdot(\nabla p_o-\rho_o g\nabla D)\right] \\ +q_{\bar{g},g}+q_{\bar{g},o}=\dfrac{\partial}{\partial t}\left[\phi(\rho_g S_g+C_{\bar{g},o}\,\rho_o S_o)\right] \\ \nabla\cdot\left[C_{\bar{o},o}\,\rho_o\dfrac{\vec{k}k_{ro}}{\mu_o}\cdot(\nabla p_o-\rho_o g\nabla D)\right]+q_{\bar{o},o}=\dfrac{\partial}{\partial t}(\phi C_{\bar{o},o}\,\rho_o S_o)\end{cases}$$

由于 $B_o=\dfrac{V_{o,RC}}{V_{o,sc}}=\dfrac{\dfrac{m_o+m_{dg}}{\rho_o}}{\dfrac{m_o}{\rho_{o,sc}}}=\dfrac{(m_o+m_{dg})\rho_{o,sc}}{m_o\,\rho_o}$

溶解气油比 $R_{g,o}=\dfrac{V_{dg,sc}}{V_{o,sc}}=\dfrac{m_{dg}}{\rho_{g,sc}}\Big/\dfrac{m_o}{\rho_{o,sc}}=\dfrac{m_{dg}\,\rho_{o,sc}}{m_o\,\rho_{g,sc}}$

可得

$$C_{\bar{g},o}=\frac{m_{dg}}{m_o+m_{dg}}=\frac{R_{g,o}\,\rho_{g,sc}}{B_o\,\rho_o} \qquad ①$$

$$C_{\bar{o},o}=\frac{\rho_{o,sc}}{\rho_o B_o} \qquad ②$$

将①,②式代入控制方程得

$$\begin{cases}\nabla\cdot\left[\rho_g \dfrac{\vec{k}k_{rg}}{\mu_g}\cdot(\nabla p_g-\rho_g g\nabla D)+\dfrac{R_{g,o}\,\rho_{g,sc}}{B_o}\dfrac{\vec{k}k_{ro}}{\mu_o}\cdot(\nabla p_o-\rho_o g\nabla D)\right] \\ +q_{\bar{g},g}+q_{\bar{g},o}=\dfrac{\partial}{\partial t}\left[\phi\left(\rho_g S_g+\dfrac{R_{g,o}\,\rho_{g,sc}}{B_o}S_o\right)\right] \\ \nabla\cdot\left[\dfrac{\rho_{o,sc}\vec{k}k_{ro}}{\mu_o B_o}\cdot(\nabla p_o-\rho_o g\nabla D)\right]+q_{\bar{o},o}=\dfrac{\partial}{\partial t}\left[\phi\dfrac{\rho_{o,sc}}{B_o}S_o\right]\end{cases}$$

由 $\rho_g=\dfrac{\rho_{g,sc}}{B_g}$ 得

$$\begin{cases}\nabla\cdot\left[\dfrac{\vec{k}k_{rg}}{\mu_g B_g}\cdot(\nabla p_g-\rho_g g\nabla D)+\dfrac{R_{g,o}\vec{k}k_{ro}}{\mu_o B_o}\cdot(\nabla p_o-\rho_o g\nabla D)\right]+ \\ q_{\bar{g},gv}+q_{\bar{g},ov}=\dfrac{\partial}{\partial t}\left[\phi\left(\dfrac{S_g}{B_g}+\dfrac{R_{g,o}S_o}{B_o}\right)\right] \\ \nabla\cdot\left[\dfrac{\vec{k}k_{ro}}{\mu_o B_o}\cdot(\nabla p_o-\rho_o g\nabla D)\right]+q_{\bar{o},ov}=\dfrac{\partial}{\partial t}\left[\phi\dfrac{S_o}{B_o}\right]\end{cases}$$

这就是相应的控制方程。

辅助方程：

$$\begin{cases}S_o+S_g=1 \\ P_{cgo}=p_g-p_o=f(S_g)\end{cases}$$

3.3 黑油模型 (干气模型)

2. $C_{w,\bar{g}}$ 可以有.
$C_{g,\bar{o}}$ 一定没有么?

	g	o	w
$\bar{g}$	√	√	×
$\bar{o}$	×	√	×
$\bar{w}$	×	×	√

控制方程:

$$\begin{cases} \left.\begin{array}{l}\text{油组分} \\ \text{气组分}\end{array}\right\} \longrightarrow \text{与3.2节完全一样} \\ \text{水组分} \longrightarrow \text{与3.1节完全一样} \end{cases}$$

辅助方程:

$$\begin{cases} S_g + S_o + S_w = 1 \\ P_{cgo} = P_g - P_o = f(S_g) \\ P_{cow} = P_o - P_w = f(S_w) \end{cases}$$

未知数 = 压力 ×3 + 饱和度 ×3

方程数 = 质量守恒方程 ×3 + 饱和度约束方程 ×1 + 毛管压力方程 ×2

3.4 组分模型

控制方程:(各组分)

$$\nabla\cdot\Big[C_{io}\rho_o\frac{\vec{k}k_{ro}}{\mu_o}\cdot(\nabla P_o-\rho_o g\nabla D)+C_{ig}\rho_g\frac{\vec{k}k_{rg}}{\mu_g}\cdot(\nabla P_g-\rho_g g\nabla D)$$
$$+C_{iw}\rho_w\frac{\vec{k}k_{rw}}{\mu_w}(\nabla P_w-\rho_w g\nabla D)\Big]+q_{i,o}+q_{i,g}+q_{i,w}=$$
$$\frac{\partial}{\partial t}\big[\phi(C_{io}\rho_o S_o+C_{ig}\rho_g S_g+C_{iw}\rho_w S_w)\big]$$

辅助方程:

$$S_g+S_o+S_w=1$$

$$\sum_{i=1}^{N}C_{ij}=1 \quad (j=g,o,w)$$

$$\frac{C_{ig}}{C_{io}}=K_{igo}=f(T,P_o,P_g,C_{1o},\cdots,C_{No},C_{1g},\cdots,C_{Ng}) \quad (i=1,\cdots,N)$$

$$\frac{C_{ig}}{C_{iw}}=K_{igw}=f(T,P_g,P_w,C_{1g},\cdots,C_{Ng},C_{1w},\cdots,C_{Nw}) \quad (i=1,\cdots,N)$$

$$P_{cgo}=P_g-P_o=f(S_g),\quad P_{cow}=P_o-P_w=f(S_w)$$

未知数个数 = 压力 ×3 + 饱和度 ×3 + 质量分数 ×3×N

方程数个数 = 质量守恒 ×N + 饱和度约束 ×1 + 组分平衡方程 ×N×2

+ 质量分数约束 ×3 + 毛管力方程 ×2

第四节 定解条件

初始条件：初始时刻油藏压力、饱和度分布。

内边界条件：
- 定产量/注入量
- 定井底压力

外边界条件：
- 定压 $p|_{\partial D}$
- 定流量 $\frac{\partial p}{\partial n}|_{\partial D}$
- 混合边条件 $\left(\frac{\partial p}{\partial n}+\alpha p\right)|_{\partial D}$

3、将井视为边界条件可能[illegible]，会有什么问题么？

第五章 流动方程的离散化

第一节 有限差分法的基本概念（略）

第二节 差分方程的建立（略）

第三节 初始条件和边界条件的处理

处理一些边界条件时，可以在边界外增加一个虚网格，从而变量增加一个，方程增加两个，问题得到封闭。

第六章 单相渗流数值模拟方法

第一节 一维单相流的数值模拟方法

1.1 数学模型

假设：① 达西流动

② 等温过程

③ 单相流体

④ 一维流动

⑤ 岩石不可压，流体微可压

⑥ 油藏非均质、各向异性

⑦ 不考虑重力

流动控制方程：依据以上假设，引入 $B=\frac{\rho_{sc}}{\rho}$，$q_v=\frac{q}{\rho_{sc}}$ 得

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{k_x}{B\mu}\frac{\partial p}{\partial x}\right)+q_v=\frac{\phi c}{B}\frac{\partial p}{\partial t}$$

初始条件和边界条件：$p(x,0)$，$p(0,t)$，$p(L_x,t)$

或 $\frac{\partial p}{\partial x}(0,t)$，$\frac{\partial p}{\partial x}(L_x,t)$

1.2 差分方程组的建立

① 岩石均匀，流体不可压缩时

方程化为 $\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}=\frac{\mu\phi c}{k_x}\frac{\partial p}{\partial t}$

隐式格式：

$$\frac{p_{i+1}^{t+\Delta t}-2p_i^{t+\Delta t}+p_{i-1}^{t+\Delta t}}{\Delta x^2}=\frac{\phi\mu c}{k_x}\frac{p_i^{t+\Delta t}-p_i^{t}}{\Delta t}$$

Crank-Nicholson格式：

$$\frac{1}{2}\left[\frac{p_{i+1}^{t}-2p_{i}^{t}+p_{i-1}^{t}}{\Delta X^{2}}+\frac{p_{i+1}^{t+\Delta t}-2p_{i}^{t+\Delta t}+p_{i-1}^{t+\Delta t}}{\Delta X^{2}}\right]=\frac{\phi\mu c}{k_x}\left(\frac{p_i^{t+\Delta t}-p_i^{t}}{\Delta t}\right)$$

② 流体微可压缩时（忽略源汇项）（不等距网格）

方程为 $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{k_x}{B\mu}\frac{\partial p}{\partial x}\right)=\frac{\phi c}{B}\frac{\partial p}{\partial t}$

离散

$$\text{左端}=\frac{\left(\frac{k_x}{B\mu}\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{i+\frac{1}{2}}-\left(\frac{k_x}{B\mu}\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta X_i}$$

$$=\frac{\left(\frac{k_x}{B\mu}\right)_{i+\frac{1}{2}}\left(\frac{p_{i+1}-p_i}{\frac{1}{2}(\Delta X_i+\Delta X_{i+1})}\right)-\left(\frac{k_x}{B\mu}\right)_{i-\frac{1}{2}}\left(\frac{p_i-p_{i-1}}{\frac{1}{2}(\Delta X_i+\Delta X_{i-1})}\right)}{\Delta X_i}$$

定义传导系数 Transmissibility

$$T_{x_{i+\frac{1}{2}}}=\frac{2}{\Delta X_i(\Delta X_i+\Delta X_{i+1})}\left(\frac{k_x}{B\mu}\right)_{i+\frac{1}{2}}$$

$$T_{x_{i-\frac{1}{2}}}=\frac{2}{\Delta X_i(\Delta X_i+\Delta X_{i-1})}\left(\frac{k_x}{B\mu}\right)_{i-\frac{1}{2}}$$

再定义 $C_{p_i}=\left(\frac{\phi c}{B}\right)_i^{n+1}$

得到离散方程

$$T_{x_{i+\frac{1}{2}}}\left(p_{i+1}^{n+1}-p_i^{n+1}\right)+T_{x_{i-\frac{1}{2}}}\left(p_{i-1}^{n+1}-p_i^{n+1}\right)+q_{v_i}$$

$$=C_{p_i}\left(p_i^{n+1}-p_i^{n}\right)$$

再加上边界条件，可构成差分方程组 $A\cdot\vec{p}=\vec{d}$

第二节 一维径向单相流的数值模拟方法

2.1 数学模型

假设：① 达西流动

② 等温过程

③ 单相流体

④ 一维径向流动

⑤ 岩石不可压，流体微可压（$\mu = Const.$）

⑥ 油藏性质 k 沿径向不变化

⑦ 不考虑重力.

流动控制方程：依据以上假设，暂不计源汇项

$$\nabla\cdot(\rho\nabla p) = \frac{\mu}{k}\frac{\partial(\phi\rho)}{\partial t}$$

得 $$\rho\nabla^2 p + (\nabla p)\cdot(\nabla\rho) = \frac{\mu}{k}\frac{\partial(\phi\rho)}{\partial t}$$

在柱坐标下展开，并考虑到各物理量与 θ, z 无关

得 $$\frac{\rho}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial p}{\partial r}\right) + \frac{\partial\rho}{\partial r}\frac{\partial p}{\partial r} = \rho\frac{\phi\mu c}{k}\frac{\partial p}{\partial t}$$

4. 这里如何处理

控制方程为

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial p}{\partial r}\right) = \frac{\phi\mu c}{k}\frac{\partial p}{\partial t}$$

初始条件和边界条件：$p(r,0)$

外边界：

$$p(r_e,t) = p_e$$

或 $$\frac{\partial p}{\partial r}(r_e,t) = 0$$

内边界：

$$\frac{k}{\mu}\cdot 2\pi r h\cdot\frac{\partial p}{\partial r} = Q \quad (r = r_w)$$

或 $$p(r_w,t) = p_{wf}$$

2.2 差分方程组的建立

作坐标变换 $x=\ln\frac{r}{r_w}$，即 $r=r_we^{x}$，$\frac{dx}{dr}=\frac{1}{r}$

则控制方程左端 $=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial p}{\partial x}\frac{dx}{dr}\right)$

$=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)$

注意：不要随便变换求导顺序！

$=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)\cdot\frac{dx}{dr}$

$=\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$

∴控制方程变为 $\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}=r_w^2e^{2x}\frac{\phi\mu c}{k}\frac{\partial p}{\partial t}$

隐式差分格式为 $\frac{p_{i+1}^{n+1}-2p_i^{n+1}+p_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2}=r_w^2e^{2x}\frac{\phi\mu c}{k}\frac{p_i^{n+1}-p_i^{n}}{\Delta t}$

记 $M_i=r_w^2e^{2i\Delta x}\frac{\phi\mu c}{k}\frac{\Delta x^2}{\Delta t}$，

得 $p_{i-1}^{n+1}-(2+M_i)p_i^{n+1}+p_{i+1}^{n+1}=-M_ip_i^{n}$

其中，$\Delta x=\frac{\ln\frac{r_e}{r_w}}{n}$

边界条件：外边界：定压：$p_n=p_e$

封闭：由 $\frac{2\pi kh}{\mu}\left(r\frac{\partial p}{\partial r}\right)\Big|_{r=r_e}=0$ 得

$\frac{\partial p}{\partial x}\Big|_{r=r_e}=0$

引用虚网格 $n+1$，则 $p_{n+1}=p_{n-1}$

差分方程化为 $2p_{n+1}-(2+M_n)p_n=-M_np_n$

内边界：定压：已知 p_{wf}，则网格1差分方程化为

$-(2+M_1)p_1^{n+1}+p_2^{n+1}=-M_1p_1^{n}-p_{wf}$

定流量：由 $\frac{2\pi kh}{\mu}\left(r\frac{\partial p}{\partial r}\right)\Big|_{r=r_w}=Q$ 得

$\frac{p_1^{n+1}-p_{wf}^{n+1}}{\Delta x}=\frac{Q\mu}{2\pi kh}$

即 $-p_{wf}^{n+1}+p_1^{n+1}=\frac{Q\mu}{2\pi kh}\Delta x$，得到新的差分方程。

求流量：$Q=\frac{2\pi kh}{\mu}\cdot\frac{p_1-p_{wf}}{\Delta x}$.

第三节 二维单相流的数值模拟方法

3-1 数学模型

假设同 1-1

流动控制方程多了一项流动项 $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{k_y}{B\mu}\frac{\partial p}{\partial y}\right)$

3-2 差分方程组的建立

定义传导系数

$$T_{x_{i\pm\frac{1}{2},j}} = \frac{\left(\frac{k_x}{B\mu}\right)_{i\pm\frac{1}{2},j}\Delta y_j h}{\frac{1}{2}(\Delta x_i + \Delta x_{i\pm 1})}$$

$$T_{y_{i,j\pm\frac{1}{2}}} = \frac{\left(\frac{k_y}{B\mu}\right)_{i,j\pm\frac{1}{2}}\Delta x_i h}{\frac{1}{2}(\Delta y_j + \Delta y_{j\pm 1})}$$

记 $V_{ij} = \Delta x_i \Delta y_j h$

则差分方程为

$$T_{x_{i+\frac{1}{2},j}}\left(p_{i+1,j}^{n+1} - p_{i,j}^{n+1}\right) + T_{x_{i-\frac{1}{2},j}}\left(p_{i-1,j}^{n+1} - p_{i,j}^{n+1}\right) + T_{y_{i,j+\frac{1}{2}}}\left(p_{i,j+1}^{n+1} - p_{ij}^{n+1}\right) + T_{y_{i,j-\frac{1}{2}}}\left(p_{i,j-1}^{n+1} - p_{ij}^{n+1}\right) + Q_v$$

$$= \frac{\phi_{ij} V_{ij} C_{ij}}{B_{ij}\Delta t}\left(p_{ij}^{n+1} - p_{ij}^{n}\right)$$

传导系数可以取为 $T_{x_{i+\frac{1}{2},j}} = \frac{2T_{x_{ij}} \cdot T_{x_{i+1,j}}}{T_{x_{ij}} + T_{x_{i+1,j}}}$

加上边界条件，可以构成差分方程组 $A\cdot\vec{p} = \vec{b}$

在行标准排列下，A是个五对角矩阵，带宽为 $2N_x+1$、

第四节 三维单相流的数值模拟方法

4.1 数学模型

假设不变，考虑重力。

流动控制方程多了一个流动项 $\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{k_z}{B\mu}\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)$，重力流动势。

4.2 差分方程组的建立（略）

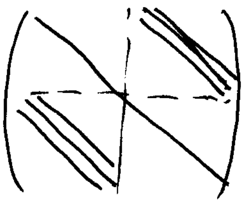
4.3 网格块的排序

① 自然排序（行/列标准排序）

② D4排序

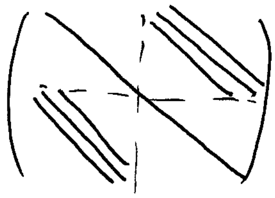
5、自己排一下

15	5	19	9	23	12
2	16	6	20	10	24
13	3	17	7	21	11
1	14	4	18	8	22



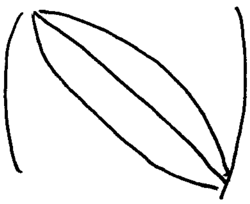
③ 双循环排序（红黑排序）

14	4	18	8	22	12
2	16	6	20	10	24
13	3	17	7	21	11
1	15	5	19	9	23



④ D2排序

7	11	15	19	22	24
4	8	12	16	20	23
2	5	9	13	17	21
1	3	6	10	14	18



第七章 多相渗流数值模拟方法

第一节 一维油水(不可压缩)两相 水驱油的数值模拟

1.1 数学模型

假设：① 达西流动
② 等温过程
③ 油水两相、两组分
④ 一维流动
⑤ 流体、岩石不可压
⑥ 油藏岩石性质(k,ϕ)非均质
⑦ 不考虑重力、毛管力

流动控制方程：由三维油水两相两组分控制方程

6 多相渗流：为什么是 ρ_l？
流动势梯
重力项

$$\nabla\cdot\left[\rho_l\frac{kk_{rl}}{\mu_l}\left(\nabla P_l-\underline{\rho_l g\nabla D}\right)\right]+q_l=\frac{\partial}{\partial t}(\phi\rho_l S_l)$$

$(l=o,w)$

得一维方程

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\rho_l\frac{kk_{rl}}{\mu_l}\frac{\partial P_l}{\partial x}\right]+q_l=\frac{\partial}{\partial t}(\phi\rho_l S_l)$$

由假设⑤,⑦得控制方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{kk_{rw}}{\mu_w}\dfrac{\partial p}{\partial x}\right)+q_{wv}=\phi\dfrac{\partial S_w}{\partial t}\\[2mm]\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{kk_{ro}}{\mu_o}\dfrac{\partial p}{\partial x}\right)+q_{ov}=\phi\dfrac{\partial S_o}{\partial t}\\[2mm]S_w+S_o=1\end{cases}$$

初始条件和边界条件：

$p(x,0)$，$S_w(x,0)$

$q_v(0,t)$，$q_w(L,t)$

1.2 差分方程组的建立(IMPES法)

① k_{rl} 与 S_l 相关，S_l 是未知量。

② 迎风格式 $k_{rl\,i-\frac{1}{2}}=\begin{cases}k_{rl}(S_{w_{i-1}}), & \rightarrow\\ k_{rl}(S_{w_i}), & \leftarrow\end{cases}$

③ 压力隐式方程

油、水控制方程相加，得

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{kk_{rw}}{\mu_w}+\frac{kk_{ro}}{\mu_o}\right)\frac{\partial p}{\partial x}\right]+q_v=0$$

定义流度 $\lambda_l=\frac{kk_{rl}}{\mu_l}$ $(l=o,w)$

$$\lambda=\lambda_o+\lambda_w$$

得到 $\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\frac{\partial p}{\partial x}\right)+q_v=0$

7、这合理？

显式处理λ，并采用迎风格式，得离散方程（隐式）

$$\lambda_i^n\left(p_{i+1}^{n+1}-p_i^{n+1}\right)+\lambda_{i-1}^n\left(p_{i-1}^{n+1}-p_i^{n+1}\right)+q_v=0$$

边界端面视为~~源汇项~~流动项，可构成差分方程组，解出 $\vec{p}^{n+1}$

④ 饱和度显式方程

由方程 $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{kk_{rl}}{\mu_l}\frac{\partial p}{\partial x}\right)+q_{lv}=\phi\frac{\partial S_l}{\partial t}$

显式处理λ，采用迎风格式，并隐式处理压力，得到离散方程

$$\lambda_{l,i}^n\frac{p_{i+1}^{n+1}-p_i^{n+1}}{\Delta x^2}+\lambda_{l,i-1}^n\frac{p_{i-1}^{n+1}-p_i^{n+1}}{\Delta x^2}+q_{lv}=\phi\frac{S_{l,i}^{n+1}-S_{l,i}^n}{\Delta t}$$

在端面上，$q_v=\frac{Q_v}{A\Delta x}$，$q_{lv}=\frac{\lambda_l}{\lambda}q_v$，

由上一步的状态向量和 $\vec{p}^{n+1}$，可显式求出 $\vec{S}_w^{n+1}$（只需一个饱和度即可）

油藏数值模拟

是否一种显式/隐式格式？

第二节 一维油水（可压缩）两相水驱油的数值模拟

2-1 数学模型

$C_r = \frac{1}{\phi}\frac{\partial\phi}{\partial p}$，这里用 p_o，p_w 都对应哪个？

IMPES中饱和度相关变量是显式处理，其余用隐式，这样会有什么问题吗？

假设：流体和岩石可压缩；考虑毛管力；

其余假设同1-1.

流动控制方程：

由三维油水两相两组分控制方程

$$\nabla\cdot\left[\rho_l\frac{kk_{rl}}{\mu_l}(\nabla p_l-\rho_l g\nabla D)\right]+q_l=\frac{\partial}{\partial t}(\phi\rho_l S_l)$$

$$(l=o,w)$$

由假设，且溶解气始终存在于油相中，得

$$\rho_o=\frac{\rho_{o,sc}+R_s\rho_{g,sc}}{B_o}=\frac{Const.}{B_o}$$

$$\rho_w=\frac{\rho_{w,sc}}{B_w}=\frac{Const.}{B_w}$$

$$C_v=\frac{1}{\phi}\frac{\partial\phi}{\partial p}$$

控制方程为：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{kk_{ro}}{B_o\mu_o}\dfrac{\partial p_o}{\partial x}\right)+q_{ov}=\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\phi S_o}{B_o}\right)\\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{kk_{rw}}{B_w\mu_w}\dfrac{\partial p_w}{\partial x}\right)+q_{wv}=\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\phi S_w}{B_w}\right)\\[2ex] S_w+S_o=1\\ p_o=p_w+p_{c,ow}\end{cases}$$

边界条件和初始条件：

$$\begin{cases}p_o(x,0)=p_i\\ S_w(x,0)=S_{wc}\end{cases}\qquad\begin{cases}q_{wv}(0,t)=q_v\\ q_{ov}(0,t)=0\\ p_o(L,t)=p_R\end{cases}$$

2.2 差分方程组的建立（IMPES法）

① 方程离散

油方程左端项 $= \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{kk_{ro}}{B_o\mu_o}\dfrac{\partial p_o}{\partial x}\right)$

定义流度 $\lambda_o = \dfrac{k_{ro}}{\mu_o B_o}$

对于块中心网格，离散上式得

$$T_{xo,i+\frac{1}{2}}(p_{o,i+1}-p_{o,i}) + T_{xo,i-\frac{1}{2}}(p_{o,i-1}-p_{o,i})$$

其中，传导系数 $T_{xo,i+\frac{1}{2}} = \dfrac{2\lambda_{o,i+\frac{1}{2}}}{\Delta x_i\left(\dfrac{\Delta x_{i+1}}{k_{i+1}}+\dfrac{\Delta x_i}{k_i}\right)}$

类似的，定义流度 $\lambda_w = \dfrac{k_{rw}}{\mu_w B_w}$，

传导系数 $T_{xw,i+\frac{1}{2}} = \dfrac{2\lambda_{w,i+\frac{1}{2}}}{\Delta x_i\left(\dfrac{\Delta x_{i+1}}{k_{i+1}}+\dfrac{\Delta x_i}{k_i}\right)}$，

水方程的左端项离散形式为

$$T_{xw,i+\frac{1}{2}}(p_{w,i+1}-p_{w,i}) + T_{xw,i-\frac{1}{2}}(p_{w,i-1}-p_{w,i})$$

由毛管压力关系，上式化为

$$T_{xw,i+\frac{1}{2}}\left[(p_{o,i+1}-p_{o,i})-(p_{c,ow,i+1}-p_{c,ow,i})\right] +$$
$$T_{xw,i-\frac{1}{2}}\left[(p_{o,i-1}-p_{o,i})-(p_{c,ow,i-1}-p_{c,ow,i})\right]$$

油方程的右端项 $= \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\phi S_o}{B_o}\right)$

$$= S_o\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\phi}{B_o}\right) + \frac{\phi}{B_o}\frac{\partial S_o}{\partial t}$$
$$= S_o\left[\frac{1}{B_o}\frac{\partial \phi}{\partial t} + \phi\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{B_o}\right)\right] - \frac{\phi}{B_o}\frac{\partial S_w}{\partial t}$$
$$= S_o\left[\frac{1}{B_o}\frac{\partial \phi}{\partial p_o}\frac{\partial p_o}{\partial t} + \phi\frac{\partial}{\partial p_o}\left(\frac{1}{B_o}\right)\frac{\partial p_o}{\partial t}\right] - \frac{\phi}{B_o}\frac{\partial S_w}{\partial t}$$
$$= S_o\left[\frac{C_r\phi}{B_o} + \phi\frac{d\left(\frac{1}{B_o}\right)}{dp_o}\right]\frac{\partial p_o}{\partial t} - \frac{\phi}{B_o}\frac{\partial S_w}{\partial t}$$

定义 $C_{poo} = \dfrac{\phi(1-S_w)}{\Delta t}\left[\dfrac{C_r}{B_o} + \dfrac{d\left(\frac{1}{B_o}\right)}{dp_o}\right]$

$C_{sw,o} = -\dfrac{\phi}{B_o\Delta t}$

得到 $C_{poo,i}(p_{o,i}-p_{o,i}^{n}) + C_{sw,o,i}(S_{w,i}-S_{w,i}^{n})$

水方程的右端项 $= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\phi S_w}{B_w}\right)$

$$= S_w \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\phi}{B_w}\right) + \frac{\phi}{B_w}\frac{\partial S_w}{\partial t}$$

$$= S_w \left[\frac{\partial}{\partial p_w}\left(\frac{\phi}{B_w}\right)\frac{\partial p_w}{\partial t}\right] + \frac{\phi}{B_w}\frac{\partial S_w}{\partial t}$$

$$= S_w \left[\frac{1}{B_w}\frac{\partial \phi}{\partial p_w} + \phi\frac{\partial(\frac{1}{B_w})}{\partial p_w}\right]\left(\frac{\partial p_o}{\partial t} - \frac{\partial p_{c,ow}}{\partial t}\right) + \frac{\phi}{B_w}\frac{\partial S_w}{\partial t}$$

$$= \phi S_w \left[\frac{C_r}{B_w} + \frac{d(\frac{1}{B_w})}{dp_w}\right]\frac{\partial p_o}{\partial t} + \left\{\frac{\phi}{B_w} - \phi S_w\left[\frac{C_r}{B_w} + \frac{d(\frac{1}{B_w})}{dp_w}\right]\frac{dp_{c,ow}}{dS_w}\right\}\frac{\partial S_w}{\partial t}$$

定义 $C_{po,w} = \frac{\phi S_w}{\Delta t}\left[\frac{C_r}{B_w} + \frac{d(\frac{1}{B_w})}{dp_w}\right]$

$$C_{sw,w} = \frac{\phi}{B_w \Delta t} - C_{po,w}\frac{dp_{c,ow}}{dS_w}$$

得到 $C_{po,w,i}(p_{o,i} - p_{o,i}^n) + C_{sw,w,i}(S_{w,i} - S_{w,i}^n)$

② 系数项的确定

$\frac{d(\frac{1}{B_o})}{dp_o}$，$\frac{d(\frac{1}{B_w})}{dp_w}$ 通过查PVT数据获得，

$\frac{d(p_{c,ow})}{dS_w}$ 通过查 p_c 曲线获得.

流体性质采用迎风格式：$\lambda_{o,i+\frac{1}{2}} = \begin{cases} \lambda_{o,i+1}, & p_{o,i+1} > p_{o,i} \\ \lambda_{o,i}, & p_{o,i+1} < p_{o,i} \end{cases}$

所有系数显式处理。(IMPES 法)

③ 压力隐式方程

油离散方程：
$$T_{xo,i+\frac{1}{2}}^n (p_{o,i+1} - p_{o,i}) + T_{xo,i-\frac{1}{2}}^n (p_{o,i-1} - p_{o,i}) + q_{ov,i} = C_{po,o,i}^n (p_{o,i} - p_{o,i}^n) + C_{sw,o,i}^n (S_{w,i} - S_{w,i}^n)$$

水离散方程：
$$T_{xw,i+\frac{1}{2}}^n (p_{o,i+1} - p_{o,i}) + T_{xw,i-\frac{1}{2}}^n (p_{o,i-1} - p_{o,i}) - T_{xw,i+\frac{1}{2}}^n (p_{c,ow,i+1} - p_{c,ow,i}) - T_{xw,i-\frac{1}{2}}^n (p_{c,ow,i-1} - p_{c,ow,i}) + q_{wv,i} = C_{po,w,i}^n (p_{o,i} - p_{o,i}^n) + C_{sw,w,i}^n (S_{w,i} - S_{w,i}^n)$$

定义系数 $\alpha = -\dfrac{c_{sw,o}}{c_{sw,w}}$

消去饱和度，得到压力方程

$$\left(T^n_{xo,i+\frac{1}{2}}+\alpha^n_i T^n_{xw,i+\frac{1}{2}}\right)\left(p_{o,i+1}-p_{o,i}\right)$$
$$+\left(T^n_{xo,i-\frac{1}{2}}+\alpha^n_i T^n_{xw,i-\frac{1}{2}}\right)\left(p_{o,i-1}-p_{o,i}\right)$$
$$-\alpha^n_i T^n_{xw,i+\frac{1}{2}}\left(p^n_{c,ow,i+1}-p^n_{c,ow,i}\right)-\alpha^n_i T^n_{xw,i-\frac{1}{2}}\left(p^n_{c,ow,i-1}-p^n_{c,ow,i}\right)$$
$$+q_{ov,i}+\alpha^n_i q_{wv,i}$$
$$=\left(C^n_{po,o,i}+\alpha^n_i C^n_{pow,i}\right)\left(p_{o,i}-p^n_{o,i}\right)$$

边界端面视为流动项，左端面 $\begin{cases} q_{wv}=q_w \\ q_{ov}=0 \end{cases}$，右端面 $p_o=p_R$.

构成差分方程组，可解出 $\vec{p}_o^{\,n+1}$

④ 饱和度显式方程

由油离散方程可得

$$S_{w,i}=S^n_{w,i}+\frac{1}{C^n_{sw,o,i}}\Big[T^n_{xo,i+\frac{1}{2}}\left(p_{o,i+1}-p_{o,i}\right)+T^n_{xo,i-\frac{1}{2}}\left(p_{o,i-1}-p_{o,i}\right)$$
$$+q_{ov,i}-C^n_{po,o,i}\left(p_{o,i}-p^n_{o,i}\right)\Big]$$

由上一步的状态向量和 $\vec{p}_o^{\,n+1}$，可显式求出 $\vec{S}_w^{\,n+1}$

第三节 二维油水两相流的数值模拟方法

3.1 数学模型

假设：流体、岩石可压缩；

考虑毛管力；

油藏k各向异性； k_{rl} 也各向异性么？

二维流动；

其余假设同1-1.

流动控制方程：

由三维两相两组分控制方程 $(l=o,w)$

$$\nabla\cdot\left[\rho_l\frac{\vec{k}k_{rl}}{\mu_l}\cdot(\nabla P_l-\rho_l g\nabla D)\right]+q_l=\frac{\partial}{\partial t}(\phi\rho_l S_l)$$

得二维控制方程为 $(l=o,w)$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_l\frac{k_x k_{rl}}{\mu_l}\frac{\partial P_l}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\rho_l\frac{k_y k_{rl}}{\mu_l}\frac{\partial P_l}{\partial y}\right)+q_l=\frac{\partial}{\partial t}(\phi\rho_l S_l)$$

联立得控制方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\rho_o\dfrac{k_x k_{ro}}{\mu_o}\dfrac{\partial P_o}{\partial x}\right)+\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\rho_o\dfrac{k_y k_{ro}}{\mu_o}\dfrac{\partial P_o}{\partial y}\right)+q_o=\dfrac{\partial}{\partial t}(\phi\rho_o S_o)\\[2ex]\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\rho_w\dfrac{k_x k_{rw}}{\mu_w}\dfrac{\partial P_w}{\partial x}\right)+\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\rho_w\dfrac{k_y k_{rw}}{\mu_w}\dfrac{\partial P_w}{\partial y}\right)+q_w=\dfrac{\partial}{\partial t}(\phi\rho_w S_w)\\[2ex]S_o+S_w=1\\[1ex]P_{cow}=P_o-P_w\end{cases}$$

边界条件和初始条件：

$$\begin{cases}P(x,y,0)=P_i\\ S_w(x,y,0)=S_{wc}\end{cases}\quad(x\in[0,L_x],\ y\in[0,L_y])$$

定压，封闭；定产量、定井底流压。

3-2 差分方程组的建立（IMPES法）

① 方程离散

油方程的右端项 $= \frac{\partial}{\partial t}(\phi\rho_o S_o)$

$$= \rho_o S_o\frac{\partial\phi}{\partial t} + \phi S_o\frac{\partial\rho_o}{\partial t} + \phi\rho_o\frac{\partial S_o}{\partial t}$$

$$= \rho_o S_o\frac{d\phi}{dp_o}\frac{\partial p_o}{\partial t} + \phi S_o\frac{d\rho_o}{dp_o}\frac{\partial p_o}{\partial t} + \phi\rho_o\frac{\partial S_o}{\partial t}$$

$$= \rho_o S_o\phi C_\phi\frac{\partial p_o}{\partial t} + \phi S_o\rho_o C_o\frac{\partial p_o}{\partial t} + \phi\rho_o\frac{\partial S_o}{\partial t}$$

$$= \phi\rho_o S_o(C_\phi + C_o)\frac{\partial p_o}{\partial t} + \phi\rho_o\frac{\partial S_o}{\partial t}$$

$$= \beta_o\frac{\partial p_o}{\partial t} + \phi\rho_o\frac{\partial S_o}{\partial t}$$

其中 $C_\phi = \frac{1}{\phi}\frac{\partial\phi}{\partial p_o} = \frac{1}{\phi}\frac{\partial\phi}{\partial p_w}$（认为$p_c$很小，对$p_o$、$p_w$影响不大）

$$\beta_o = \phi\rho_o S_o(C_\phi + C_o)$$

离散得 $\beta_{o,i,j}\frac{p^{n+1}_{o,i,j} - p^{n}_{o,i,j}}{\Delta t} + (\phi\rho_o)_{i,j}\frac{S^{n+1}_{o,i,j} - S^{n}_{o,i,j}}{\Delta t}$

水方程的右端项 $= \frac{\partial}{\partial t}(\phi\rho_w S_w)$

$$= \beta_w\frac{\partial p_w}{\partial t} + \phi\rho_w\frac{\partial S_w}{\partial t}$$

其中 $\beta_w = \phi\rho_w S_w(C_\phi + C_w)$

离散得 $\beta_{w,i,j}\frac{p^{n+1}_{w,i,j} - p^{n}_{w,i,j}}{\Delta t} + (\phi\rho_w)_{i,j}\frac{S^{n+1}_{w,i,j} - S^{n}_{w,i,j}}{\Delta t}$

油方程的流动项 $= \frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_o\frac{k_x k_{ro}}{\mu_o}\frac{\partial p_o}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho_o\frac{k_y k_{ro}}{\mu_o}\frac{\partial p_o}{\partial y}\right)$

某实流度 不应混淆绝对 渗透率。（刚说讲的几个问题里，流度、Trans的定义 都是不一致的。） →

定义流度 $\lambda_{ox} = \rho_o\frac{k_x k_{ro}}{\mu_o}$，$\lambda_{oy} = \rho_o\frac{k_y k_{ro}}{\mu_o}$

得 $\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda_{ox}\frac{\partial p_o}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda_{oy}\frac{\partial p_o}{\partial y}\right)$

$$= \frac{1}{\Delta x_{i,j}}\left[\left(\lambda_{ox}\frac{\partial p_o}{\partial x}\right)_{i+\frac{1}{2},j} - \left(\lambda_{ox}\frac{\partial p_o}{\partial x}\right)_{i-\frac{1}{2},j}\right]$$

$$+ \frac{1}{\Delta y_{i,j}}\left[\left(\lambda_{oy}\frac{\partial p_o}{\partial y}\right)_{i,j+\frac{1}{2}} - \left(\lambda_{oy}\frac{\partial p_o}{\partial y}\right)_{i,j-\frac{1}{2}}\right]$$

$$= \frac{2\lambda_{ox,i+\frac{1}{2},j}}{\Delta x_{i,j}(\Delta x_{i,j} + \Delta x_{i+1,j})}\left(p^{n+1}_{o,i+1,j} - p^{n+1}_{o,i,j}\right)$$

$$+ \frac{2\lambda_{ox,i-\frac{1}{2},j}}{\Delta x_{i,j}(\Delta x_{i,j} + \Delta x_{i-1,j})}\left(p^{n+1}_{o,i-1,j} - p^{n+1}_{o,i,j}\right)$$

$$+ \frac{2\lambda_{oy,i,j+\frac{1}{2}}}{\Delta y_{i,j}\cdot(\Delta y_{i,j} + \Delta y_{i,j+1})}\left(p^{n+1}_{o,i,j+1} - p^{n+1}_{o,i,j}\right)$$

$$+\frac{2\lambda_{oy,i,j-\frac{1}{2}}}{\Delta y_{i,j}\cdot(\Delta y_{i,j}+\Delta y_{i,j-1})}\left(p^{n+1}_{o,i,j-1}-p^{n+1}_{o,i,j}\right)$$

水方程的流动项 $=\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_w\frac{k_x k_{rw}}{\mu_w}\frac{\partial p_w}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\rho_w\frac{k_y k_{rw}}{\mu_w}\frac{\partial p_w}{\partial y}\right)$

定义流度 $\lambda_{wx}=\rho_w\frac{k_x k_{rw}}{\mu_w}$，$\lambda_{wy}=\rho_w\frac{k_y k_{rw}}{\mu_w}$

得（除了 o,w 符号不同以外，与油流动项无差别。）

油离散方程：

$$T_{ox,i+\frac{1}{2},j}\left(p^{n+1}_{o,i+1,j}-p^{n+1}_{o,i,j}\right)+T_{ox,i-\frac{1}{2},j}\left(p^{n+1}_{o,i-1,j}-p^{n+1}_{o,i,j}\right)$$
$$+T_{oy,i,j+\frac{1}{2}}\left(p^{n+1}_{o,i,j+1}-p^{n+1}_{o,i,j}\right)+T_{oy,i,j-\frac{1}{2}}\left(p^{n+1}_{o,i,j-1}-p^{n+1}_{o,i,j}\right)$$
$$+Q_{o,i,j}=V_{i,j}\beta_{o,i,j}\frac{p^{n+1}_{o,i,j}-p^{n}_{o,i,j}}{\Delta t}+V_{i,j}(\phi\rho_o)_{i,j}\frac{S^{n+1}_{o,i,j}-S^{n}_{o,i,j}}{\Delta t}$$

其中，传导系数 $T_{ox,i+\frac{1}{2},j}=\lambda_{ox,i+\frac{1}{2},j}\frac{2\Delta y_{i,j}h}{\Delta x_{i,j}+\Delta x_{i+1,j}}$

$$T_{oy,i,j+\frac{1}{2}}=\lambda_{oy,i,j+\frac{1}{2}}\frac{2\Delta x_{i,j}h}{\Delta y_{i,j}+\Delta y_{i,j+1}}$$

体积 $V_{i,j}=\Delta x_{i,j}\Delta y_{i,j}h$

源汇项 $Q_{o,i,j}=q_o V_{i,j}$

整理得

$$T_{oy,i,j-\frac{1}{2}}p^{n+1}_{o,i,j-1}+T_{ox,i-\frac{1}{2},j}p^{n+1}_{o,i-1,j}$$
$$-\left(T_{ox,i+\frac{1}{2},j}+T_{ox,i-\frac{1}{2},j}+T_{oy,i,j+\frac{1}{2}}+T_{oy,i,j-\frac{1}{2}}+\frac{V_{i,j}\beta_{o,i,j}}{\Delta t}\right)p^{n+1}_{o,i,j}$$
$$+T_{ox,i+\frac{1}{2},j}p^{n+1}_{o,i+1,j}+T_{oy,i,j+\frac{1}{2}}p^{n+1}_{o,i,j+1}$$
$$=V_{i,j}(\phi\rho_o)_{i,j}\frac{S^{n+1}_{o,i,j}-S^{n}_{o,i,j}}{\Delta t}-\frac{V_{i,j}\beta_{o,i,j}}{\Delta t}p^{n}_{o,i,j}-Q_{o,i,j}$$

水离散方程：

$$T_{wy,i,j-\frac{1}{2}}p^{n+1}_{w,i,j-1}+T_{wx,i-\frac{1}{2},j}p^{n+1}_{w,i-1,j}$$
$$-\left(T_{wx,i+1,j}+T_{wx,i-1,j}+T_{wy,i,j+1}+T_{wy,i,j-1}+\frac{V_{i,j}\beta_{w,i,j}}{\Delta t}\right)p^{n+1}_{w,i,j}$$
$$+T_{wx,i+\frac{1}{2},j}p^{n+1}_{w,i+1,j}+T_{wy,i,j+1}p^{n+1}_{w,i,j+1}$$
$$=V_{i,j}(\phi\rho_w)_{i,j}\frac{S^{n+1}_{w,i,j}-S^{n}_{w,i,j}}{\Delta t}-\frac{V_{i,j}\beta_{w,i,j}}{\Delta t}p^{n}_{w,i,j}-Q_{w,i,j}$$

定义 $S_{l,i,j} = T_{ly,i,j-\frac{1}{2}}$

$W_{l,i,j} = T_{ly,i-\frac{1}{2},j}$

$$C_{l,i,j} = -\left(T_{lx,i-\frac{1}{2},j} + T_{lx,i+\frac{1}{2},j} + T_{ly,i,j+\frac{1}{2}} + T_{ly,i,j-\frac{1}{2}} + \frac{V_{i,j}\beta_{l,i,j}}{\Delta t}\right)$$

$E_{l,i,j} = T_{lx,i+\frac{1}{2},j}$

$N_{l,i,j} = T_{ly,i,j+\frac{1}{2}}$

$$f_{l,i,j} = -\left(Q_{l,i,j} + \frac{V_{i,j}\beta_{l,i,j}}{\Delta t}p^{n}_{l,i,j}\right)$$

$(l = o, w)$

得到简化的油、水离散方程：

$$S_{l,i,j}p^{n+1}_{l,i,j-1} + W_{l,i,j}p^{n+1}_{l,i-1,j} + C_{l,i,j}p^{n+1}_{l,i,j} + E_{l,i,j}p^{n+1}_{l,i+1,j} + N_{l,i,j}p^{n+1}_{l,i,j+1}$$
$$= f_{l,i,j} + V_{i,j}(\phi\rho_l)_{i,j}\frac{S^{n+1}_{l,i,j} - S^{n}_{l,i,j}}{\Delta t} \qquad (l = o, w)$$

② 方程参数的确定

绝对渗透率平均化，
$$k_{x,i+\frac{1}{2},j} = \begin{cases} \frac{1}{2}(k_{x,i,j} + k_{x,i+1,j}) & \text{(算术平均)} \\ \dfrac{k_{x,i+1,j}\Delta x_{i+1} + k_{x,i,j}\Delta x_i}{\Delta x_{i+1} + \Delta x_i} & \text{(加权平均)} \\ \sqrt{k_{x,i+1,j}k_{x,i,j}} & \text{(几何平均)} \\ \dfrac{\Delta x_{i+1} + \Delta x_i}{\dfrac{\Delta x_{i+1}}{k_{x,i+1,j}} + \dfrac{\Delta x_i}{k_{x,i,j}}} & \text{(调和平均)} \end{cases}$$

流度取上游权，
$$\lambda_{ox,i+\frac{1}{2},j} = \begin{cases} \lambda_{ox,i,j}, & \text{if } p_{o,i,j} > p_{o,i+1,j} \\ \lambda_{ox,i+1,j}, & \text{if } p_{o,i+1,j} > p_{o,i,j} \end{cases}$$

所有参数显式处理。

③ 边界条件统一处理

对于外边界：

?不懂

封闭边条件 —— 边界网格外加虚网格，其渗透率为 0（或 $p_{虚}=p_{边}$）

定流量边条件 —— 在封闭边界网格加入定流量源汇项。

定压边条件 —— 在封闭边界网格中加入定压控制。

④ 隐式压力方程

油离散方程 $+ \frac{\rho_o}{\rho_w}$ 水离散方程

并取 $p_w^{n+1} = p_o^{n+1} - p_c^n$ 得

$$S_{ij} p_{o,i,j-1}^{n+1} + W_{ij} p_{o,i-1,j}^{n+1} + C_{ij} p_{o,i,j}^{n+1} + E_{ij} p_{o,i+1,j}^{n+1} + N_{ij} p_{o,i,j+1}^{n+1}$$
$$= f_{ij}$$

其中 $S_{ij} = S_{o,i,j} + \frac{\rho_o}{\rho_w} S_{w,i,j}$

W_{ij}、C_{ij}、E_{ij}、N_{ij} 定义类似

$$f_{ij} = f_{o,ij} + \frac{\rho_o}{\rho_w} f_{w,ij} + \frac{\rho_o}{\rho_w}\left(S_{w,ij} p_{c,i,j-1}^n + W_{w,ij} p_{c,i-1,j}^n + C_{w,ij} p_{c,i,j}^n + E_{w,ij} p_{c,i+1,j}^n + N_{w,ij} p_{c,i,j+1}^n \right)$$

组成方程组，解得 p_o^{n+1}，进而有 p_w^{n+1}

⑤ 显式饱和度方程

$$S_{w,ij}^{n+1} = S_{w,ij}^n + \frac{\Delta t}{V_{ij}(\phi \rho_w)_{ij}} \left(S_{w,ij} p_{w,i,j-1}^{n+1} + W_{w,ij} p_{w,i-1,j}^{n+1} + C_{w,ij} p_{w,ij}^{n+1} + E_{w,ij} p_{w,i+1,j}^{n+1} + N_{w,ij} p_{w,i,j+1}^{n} - f_{w,ij} \right)$$

第四节　三维多相流的数值模拟方法（黑油模型）

4.1 数学模型

假设：考虑重力；

油气水三相三组分（黑油模型），气存在于气、油、水三相中；

三维流动；

其余假设同3.1.

流动控制方程：

$$\nabla\cdot\left[\frac{kk_{ro}}{}\right.$$