

第六章 Saint - Venant 问题

6-1 问题的提出

问题: 对正柱体 Ω , 不计体力, 仅在两端有外力,

求应力场和位移场。

建立: 对一端面, 取其形心主轴 $O-xy$, z 轴平行于母线, $O-xyz$ 构成右手系。

方程组:
(应力解法)

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{T} = \vec{0} \\ \nabla^2 \vec{T} + \frac{1}{1+\mu} \nabla \nabla \Theta = \vec{0} \\ \vec{n} \cdot \vec{T} = \vec{0} \\ \vec{n} \cdot \vec{T} = \vec{e} \\ \vec{n} \cdot \vec{T} = \vec{e} \end{cases} \begin{matrix} (\Omega) \\ \\ (\text{侧面 } S) \\ (z=l) \\ (z=0) \end{matrix}$$

Saint - Venant 意义下的放松边界条件: (Saint - Venant 边界条件)
(放松边界条件)

$$\begin{cases} \iint_G \tau_{zx} dx dy = R_x \\ \iint_G \tau_{yz} dx dy = R_y \\ \iint_G \sigma_z dx dy = R_z \\ \iint_G y \sigma_x dx dy = M_x \\ \iint_G -x \sigma_z dx dy = M_y \\ \iint_G (x \tau_{yz} - y \tau_{zx}) dx dy = M_z \end{cases} (z=l)$$

注: $z=0$ 的 Saint - Venant 边界条件可依平衡关系建立, 在此省略。

以 Saint - Venant 边界条件代替原方程组中的端部边条件, 构成了放松边界条件的边值问题, 称为 "Saint - Venant 问题".

半逆解法：依据问题的特性，通过某种物理考虑或数学推测，预先对应力和位移分量作某些假定，进行求解。
如果这假定与方程组相容，则可以求出一个真实解。

6.2 扭转

Saint-Venant 边界条件：

$$\begin{cases} \iint_G \tau_{zx} dx dy = \iint_G \tau_{zy} dx dy = \iint_G \sigma_z dx dy = 0 \\ \iint_G y \sigma_z dx dy = \iint_G x \sigma_z dx dy = 0 \\ \iint_G (x \tau_{zy} - y \tau_{zx}) dx dy = M_z \end{cases} \quad (z=l)$$

假定(半逆解法的假定)：

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0$$

方程组：平衡方程，应力协调方程，侧面边界条件化为

$$\begin{cases} \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0 \\ \nabla^2 \tau_{zx} = \nabla^2 \tau_{yz} = 0 \\ \tau_{zx} \cos \langle \vec{n}, \vec{x} \rangle + \tau_{zy} \cos \langle \vec{n}, \vec{y} \rangle = 0 \end{cases}$$

1° 应力场

$$\therefore \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = 0$$

$$\therefore \tau_{zx}, \tau_{zy} \text{ 与 } z \text{ 无关: } \tau_{zx} = \tau_{zx}(x, y), \tau_{zy} = \tau_{zy}(x, y)$$

$$\therefore \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = \nabla \times (-\tau_{yz}, \tau_{zx}) = 0$$

\therefore 平面矢量场 $(-\tau_{yz}, \tau_{zx})$ 有标量势。定义：

$$F(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} (-\tau_{yz}, \tau_{zx}) \cdot d\vec{l}$$

$$\text{则 } \tau_{zx} = \frac{\partial F}{\partial y}, \quad \tau_{zy} = -\frac{\partial F}{\partial x}$$

$$\nabla^2 \tau_{zx} = 0, \quad \nabla^2 \tau_{zy} = 0$$

$$\therefore \frac{\partial}{\partial x}(\nabla^2 F) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial y}(\nabla^2 F) = 0, \text{ 即 } \nabla^2 F \text{ 为常量.}$$

设 $\nabla^2 F = -2\mu\alpha$, 其中 μ 为剪切模量, α 为常数. 记 $F = \mu\alpha\psi$ (比扭转角)

$$\text{则 } \nabla^2 \psi = -2, \text{ 且 } \tau_{zx} = \mu\alpha \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \tau_{zy} = -\mu\alpha \frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

其中 ψ 为 Prandtl 应力函数, 或扭转的应力函数.

从而, 侧面边界条件化为:

$$\frac{\partial \psi}{\partial s} = 0 \quad (\text{侧面边界})$$

这里可以类比流函数。截面上的切应力场在边界上平行于边界, 边界线构成一条封闭“流线”, “流函数”在边界上取常值。

多连通域的法方向: 记以弹性体为视角的外法向为 \vec{n}^+ , 以孔洞为视角的外法向为 \vec{n}^- . 它们的关系为 $\vec{n}^+ = -\vec{n}^-$. 截面区域 G 的边界 L 由 L_0, L_1, \dots, L_n 组成, 其中 L_0 为外边界. L_i 围成的区域为 G_i . (即孔洞).

侧面边界条件再化为:

$$\psi(x, y) = C_i \quad (i = 0, 1, \dots, n)$$

因为 ψ 加成一个常数不影响应力, 故一般可令 $C_0 = 0$.

$$\begin{aligned} \therefore \iint_G \tau_{zx} dx dy &= \mu\alpha \iint_G \frac{\partial \psi}{\partial y} dx dy \\ &= \mu\alpha \oint_L \psi \cos \langle \vec{n}, \vec{y} \rangle ds \quad (\text{直接用高斯线即可得}) \\ &= \mu\alpha \sum_{i=1}^m C_i \oint_{L_i} \vec{n} \cdot \vec{y} ds \\ &= -\mu\alpha \sum_{i=1}^m C_i \oint_{L_i} d\vec{s} \cdot \vec{y} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{同理 } \iint_G \tau_{zy} dx dy = 0.$$

\therefore 端部的合力边界条件成立.

$$\begin{aligned} \text{证: } \iint_{\Omega} \nabla \cdot (\psi \vec{I}) dx dy &= \oint_L \vec{n} \cdot (\psi \vec{I}) ds = \oint_L \vec{n} \psi ds \\ \text{第拙 } \therefore \iint_{\Omega} \nabla \psi dx dy &= \oint_L \vec{n} \psi ds \\ \therefore \iint_{\Omega} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} dx dy &= \hat{x}_i \cdot \iint_{\Omega} \nabla \psi dx dy = \hat{x}_i \cdot \oint_L \vec{n} \psi ds = \oint_L \psi (\vec{n} \cdot \hat{x}_i) ds. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_z &= \iint_G (x \tau_{yz} - y \tau_{zx}) dx dy \\
&= -\mu \alpha \iint_G \left(x \frac{\partial \psi}{\partial x} + y \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) dx dy \\
&= -\mu \alpha \iint_G \left[\frac{\partial}{\partial x} (x \psi) + \frac{\partial}{\partial y} (y \psi) - 2\psi \right] dx dy \\
&= -\mu \alpha \oint_L \vec{n} \cdot (x \vec{e}_1, y \vec{e}_2) ds + 2\mu \alpha \iint_G \psi dx dy \\
&= -\mu \alpha \sum_{i=1}^m C_i \oint_{L_i} (x \vec{n} \cdot \vec{e}_1 + y \vec{n} \cdot \vec{e}_2) ds + 2\mu \alpha \iint_G \psi dx dy \\
&= \mu \alpha \sum_{i=1}^m C_i \oint_{L_i} (x \vec{n} \cdot \vec{e}_1 + y \vec{n} \cdot \vec{e}_2) ds + 2\mu \alpha \iint_G \psi dx dy \\
&= \mu \alpha \sum_{i=1}^m C_i \oint_{L_i} \left(\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} \right) dx dy + 2\mu \alpha \iint_G \psi dx dy \\
&= 2\mu \alpha \left(\sum_{i=1}^m C_i A_i + \iint_G \psi dx dy \right) \\
&= -\mu \alpha \sum_{i=1}^m C_i \oint_{L_i} [x d\vec{s} \cdot \vec{e}_1 + y d\vec{s} \cdot (-\vec{e}_1)] + 2\mu \alpha \iint_G \psi dx dy
\end{aligned}$$

其中 A_i 为区域 G_i 的面积。定义扭转刚度:

$$D = 2 \left(\iint_G \psi dx dy + \sum_{i=1}^m C_i A_i \right)$$

则扭矩

$$M_z = \mu \alpha D.$$

2. 位移场

位移用应力表示, 得到扭转问题的位移满足

$$\begin{cases}
\frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] = 0 \\
\frac{\partial v}{\partial y} = \varepsilon_y = 0 \\
\frac{\partial w}{\partial z} = \varepsilon_z = 0 \\
\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 2\varepsilon_{xy} = \frac{1}{\mu} \tau_{xy} = 0 \\
\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 2\varepsilon_{yz} = \frac{1}{\mu} \tau_{yz} = -\alpha \frac{\partial \psi}{\partial x} \\
\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = 2\varepsilon_{zx} = \frac{1}{\mu} \tau_{zx} = \alpha \frac{\partial \psi}{\partial y}
\end{cases}$$

设函数 $\psi(x, y) = \Psi(x, y) + \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$

翘曲函数 $\psi(x, y)$ 满足 $\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y}$, $\frac{\partial \psi}{\partial y} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}$

代入 Prandtl 应力函数 Ψ 满足的方程, 得 ψ, Ψ 分别满足

$$\begin{cases} \nabla^2 \psi = 0 & (G) \\ \psi = C_i + \frac{1}{2}(x^2 + y^2) & (L_i, i=0, 1, \dots, m) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \nabla^2 \Psi = 0 & (G) \\ \frac{d\psi}{dn} = y \cos \langle \vec{n}, \vec{x} \rangle - x \cos \langle \vec{n}, \vec{y} \rangle & (L) \end{cases}$$

注: 翘曲函数 ψ 的边值条件推导

$$\because \frac{\partial \psi}{\partial s} = 0$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{\partial \psi}{\partial n} &= \frac{\partial \psi}{\partial x} \cos \langle \vec{n}, \vec{x} \rangle + \frac{\partial \psi}{\partial y} \cos \langle \vec{n}, \vec{y} \rangle \\ &= \frac{\partial \Psi}{\partial y} \cos \langle \vec{n}, \vec{x} \rangle - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \cos \langle \vec{n}, \vec{y} \rangle \\ &= \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} + y \right) \cos \langle \vec{n}, \vec{x} \rangle - \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} + x \right) \cos \langle \vec{n}, \vec{y} \rangle \\ &= \frac{\partial \Psi}{\partial y} \cos \langle \vec{z}, \vec{y} \rangle + \frac{\partial \Psi}{\partial x} \cos \langle \vec{z}, \vec{x} \rangle + \\ &\quad y \cos \langle \vec{n}, \vec{x} \rangle - x \cos \langle \vec{n}, \vec{y} \rangle \\ &= \frac{\partial \psi}{\partial s} + \dots \\ &= y \cos \langle \vec{n}, \vec{x} \rangle - x \cos \langle \vec{n}, \vec{y} \rangle \end{aligned}$$

把 $u + dyz$, $v - dxz$, $w - d\psi$ 视为位移场, 则此位移场满足

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x}(u + dyz) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial y}(v - dxz) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial z}(w - d\psi) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial y}(u + dyz) + \frac{\partial}{\partial x}(v - dxz) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial z}(v - dxz) + \frac{\partial}{\partial y}(w - d\psi) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x}(w - d\psi) + \frac{\partial}{\partial z}(u + dyz) = 0 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} -x - \frac{\partial \psi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \\ -\frac{\partial \psi}{\partial x} + y = -\frac{\partial \psi}{\partial y} \end{pmatrix}$$

即位移场 $(u + \alpha yz, v - \alpha xz, w - \alpha \varphi)$ 形成的应变场为 $\vec{0}$.

由 Volterra 积分知, 上述位移场为刚体位移场.

如果不考虑刚体位移, 且令 $\varphi(0,0) = 0$, 则得扭转问题的位移场:

$$\begin{cases} u = -\alpha yz \\ v = \alpha xz \\ w = \alpha \varphi \end{cases} \quad \text{或记为柱坐标形式} \quad \begin{cases} u_r = 0 \\ u_\theta = \alpha r z \\ u_z = \alpha \varphi \end{cases}$$

其中 $\alpha = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{u_\theta}{r} \right)$, 为比扭转角.

$u_z \propto \varphi$, φ 为翘曲函数, 表示了弹性体的翘曲程度 u_z .

注: 1° 以 Prandtl 应力函数表示的位移单值条件:

\therefore 翘曲函数 φ 是单值的

$$\therefore \oint_{L_i} d\varphi = 0 \quad (i=1, \dots, m)$$

$$\therefore 0 = \oint_{L_i} \frac{\partial \varphi}{\partial s} ds$$

$$= \oint_{L_i} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} \cos \langle \vec{s}, \vec{x} \rangle + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cos \langle \vec{s}, \vec{y} \rangle \right] ds$$

$$= \oint_{L_i} \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial y} \cos \langle \vec{n}^+, \vec{y} \rangle - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cos \langle \vec{n}^+, \vec{x} \rangle \right) ds$$

$$= - \oint_{L_i} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + y \right) \cos \langle \vec{n}^+, \vec{y} \rangle + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + x \right) \cos \langle \vec{n}^+, \vec{x} \rangle \right] ds$$

$$= - \oint_{L_i} \frac{\partial \varphi}{\partial n^+} ds + \oint_{L_i} (y \cos \langle \vec{n}^+, \vec{y} \rangle + x \cos \langle \vec{n}^+, \vec{x} \rangle) ds$$

\therefore Prandtl 应力函数 φ 的位移单值性条件为

$$\oint_{L_i} \frac{\partial \varphi}{\partial n^+} ds = 2A_i \quad (i=1, \dots, m)$$

以上 m 个方程可以确定常数 C_i ($i=1, \dots, m$). 积分方向为逆时针.

2° 扭转问题公式

有用么?

① Prandtl 应力函数问题

$$\begin{cases} \nabla^2 \varphi = -2 & (G) \\ \varphi|_{L_0} = 0, \varphi|_{L_i} = C_i \\ \oint_{L_i} \frac{d\varphi}{dn^+} ds = 2A_i \end{cases}$$

~~6.3 扭转的一般性质~~

扭转刚度 $D = 2 \left(\iint_G \Psi \, dx dy + \sum_{i=1}^m G_i A_i \right)$

比扭转角 $\alpha = \frac{M_z}{\mu D}$

剪应力 $\tau_{zx} = \mu \alpha \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad \tau_{zy} = -\mu \alpha \frac{\partial \Psi}{\partial x}$

特别地, 若 G 为单连通区域时,

问题
$$\begin{cases} \nabla^2 \Psi = -2 & (G) \\ \Psi|_L = 0 \end{cases}$$

扭转刚度 $D = 2 \iint_G \Psi \, dx dy$

② 翘曲函数问题

$$\begin{cases} \nabla^2 \varphi = 0 & (G) \\ \frac{d\varphi}{dn} = y \cos \langle \vec{n}, \hat{x} \rangle - x \cos \langle \vec{n}, \hat{y} \rangle & (L) \end{cases}$$

扭转刚度 $D = \iint_G (x^2 + y^2 + x \frac{\partial \varphi}{\partial y} - y \frac{\partial \varphi}{\partial x}) \, dx dy$

比扭转角 $\alpha = \frac{M_z}{\mu D}$

剪应力 $\tau_{zx} = \mu \alpha \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - y \right), \quad \tau_{zy} = \mu \alpha \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + x \right)$

③ 位移场

$$\begin{cases} u_r = 0 \\ u_\theta = \alpha r z \\ u_z = \alpha \varphi \end{cases}$$

6.3 扭转的一般性质

引理: 若 $V(x, y)$ 为区域 G 上的下调和函数, 即 $\nabla^2 V < 0$, 则 V 的最小值在 G 的边界上达到.

证明: 若 V 在 G 内部一点 (x_0, y_0) 达到最小值, 则

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \Big|_{(x_0, y_0)} \geq 0, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \Big|_{(x_0, y_0)} \geq 0$$

则 $\nabla^2 V|_{(x_0, y_0)} \geq 0$, 与前提矛盾. \square

性质1: 扭转刚度 D 恒为正.

证明: ψ 为下调和函数, 由引理知, ψ 的最小值在边界上达到.

若 ψ 的最小值在内边界 L_i 上达到, 则 L_i 上处处都是最小值,

$$\text{得 } \frac{\partial \psi}{\partial n} \leq 0, \quad i$$

$$\text{这与 } \oint_{L_i} \frac{\partial \psi}{\partial n} ds = 2A_i > 0 \text{ 矛盾.}$$

所以 ψ 的最小值在外边界 L_0 上达到, 即最小值为 0.

$$\text{所以 } \psi \geq 0 \quad (G)$$

$$C_i > 0 \quad (i=1, \dots, m)$$

因为 $\nabla^2 \psi = -2$, 所以 ψ 不可能为常值, 必有大于零的点.

$$\text{所以 } \iint_G \psi dx dy > 0$$

$$\text{所以扭转刚度 } D = 2 \left(\iint_G \psi dx dy + \sum_{i=1}^m C_i A_i \right) > 0$$

性质2: 最大剪应力在边界上达到

$$\text{证明: } \tau^2 = \tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2$$

$$= \mu^2 \alpha^2 (\psi_{,x}^2 + \psi_{,y}^2)$$

$$\text{则 } \nabla^2(\tau^2) = 2\mu^2 \alpha^2 (\psi_{,xx}^2 + 2\psi_{,xy} \psi_{,xy} + \psi_{,yy}^2)$$

$$\geq 2\mu^2 \alpha^2 (\psi_{,xx}^2 + \psi_{,yy}^2)$$

$$\geq \mu^2 \alpha^2 (\psi_{,xx} + \psi_{,yy})^2$$

$$= 4\mu^2 \alpha^2$$

$$> 0$$

即 τ^2 为上调和函数, 最大值在边界上达到.

性质3: 剪应力沿着等 ψ 线的方向.

证明: 此前已经把 ψ 比拟为剪应力的流函数, 故此性质显然.

注: 1° 等 ψ 线越密, ~~剪应力~~ “流量”越大, 剪应力越大.
单位长度

2° 剪应力可比拟为不可压缩流体.

3° ψ 应力函数按等值线重新剖分区域得到的新的函数依然是 ψ 应力函数, 即对这个新的扭转问题, 解是一样的.
一个

用物理的方式解释, 就是说, 所有以等应力线围成的柱体, 应力张量 $\vec{T} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \tau_{xz} \\ 0 & 0 & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & 0 \end{pmatrix}$, 且剪应力 $(\tau_{zx}, \tau_{zy}) \cdot (n_x, n_y) = 0$.

则在侧面上 $\vec{n} = (n_x, n_y, 0)$, 应力

$$\vec{t} = \vec{n} \cdot \vec{T} = (0, 0, 0)$$

即侧面不受力。端面上合力、合力矩为零依然成立, 所以新的函数是 Saint-Venant 扭转问题的一个解。

性质4: 沿闭合等应力线的剪应力环量正比于等应力线围成的面积。

证明: $\oint_L \vec{t} \cdot d\vec{s} = \oint_L \tau_s ds$

$$= \oint_L \mu \alpha \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} \cos \langle \vec{s}, \hat{x} \rangle - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \cos \langle \vec{s}, \hat{y} \rangle \right) ds$$

$$= -\mu \alpha \oint_L \frac{\partial \Psi}{\partial y} \cos \langle \vec{n}, \hat{x} \rangle + \frac{\partial \Psi}{\partial x} \cos \langle \vec{n}, \hat{y} \rangle ds$$

$$= -\mu \alpha \iint_A \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \right) dx dy$$

$$= 2\mu \alpha A \quad \square.$$

6.4 椭圆截面杆的扭转



椭圆边界 $L_0: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > b)$

问题: $\begin{cases} \nabla^2 \Psi = -2 & (G) \\ \Psi|_{L_0} = 0 \end{cases}$

半正解: 椭圆形薄膜下方受压鼓起, 等应力线是同族椭圆。

故设 $\Psi = k \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right)$

Ψ : 代入方程得 $k = \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}$, 即应力函数 Ψ 为

$$\Psi = \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right)$$

剪应力 $\tau_{zx} = \mu \alpha \frac{\partial \Psi}{\partial y} = -2\mu \alpha \frac{a^2}{a^2 + b^2} y$

$$\tau_{zy} = \mu \alpha \frac{\partial \Psi}{\partial x} = 2\mu \alpha \frac{b^2}{a^2 + b^2} x$$

扭转刚度 $D = 2 \iint_G \Psi dx dy = \frac{2a^2 b^2}{a^2 + b^2} \iint_G \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right) dx dy$

作变数替换 $\begin{cases} x = ar \cos \theta \\ y = br \sin \theta \end{cases} \quad (0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta < 2\pi)$

变换的 Jacobi 行列式为

$$\begin{vmatrix} a \cos \theta & -ar \sin \theta \\ b \sin \theta & br \cos \theta \end{vmatrix} = abr$$

$$\text{积分化为 } D = \frac{2a^3b^3}{a^2+b^2} \int_0^1 \int_0^{2\pi} (1-r^2) r dr d\theta$$

$$= \frac{a^3b^3}{a^2+b^2} \pi$$

$$\text{比扭转角 } \alpha = \frac{M_z}{\mu D} = \frac{a^2+b^2}{a^3b^3\pi\mu} M_z$$

$$\text{共轭函数 } \psi = \Psi + \frac{i}{z}(x^2+y^2)$$

$$= \frac{a^2b^2}{a^2+b^2} + \frac{a^2-b^2}{2(a^2+b^2)}(x^2-y^2)$$

$$\text{翘曲函数 } \varphi = -\text{Im} \left\{ \frac{ab^2}{a^2+b^2} + \frac{a^2-b^2}{2(a^2+b^2)} z^2 \right\} \quad \leftarrow \text{翘曲函数的复变解法}$$

$$= -\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} xy$$

$$\text{位势场 } u_r = 0, \quad u_\theta = \alpha r z, \quad u_z = -\alpha \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} xy$$

注: 1° 最大剪应力

$$\therefore \tau^2 = \tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2 = \frac{4\mu^2\alpha^2}{(a^2+b^2)^2} (a^4y^2 + b^4x^2)$$

$$\text{代入边界方程 } L_0: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ 得}$$

$$\tau^2|_{L_0} = \frac{4\mu^2\alpha^2}{(a^2+b^2)^2} b^2 [a^4 - (a^2-b^2)x^2]$$

所以在 $x=0$ 时, 剪应力最大,

$$\tau_{\max} = 2\mu\alpha \frac{a^2b}{a^2+b^2}$$

对应点为椭圆边界短轴的两个端点。

2° 扭转刚度

若椭圆面积 $A = \pi ab$ 给定, 则在 $a=b$ 时, 扭转刚度最大。

$$\text{最大扭转刚度 } D_{\max} = \frac{\pi}{2} a^4$$

所有凸的单连通区域中, 圆的扭转刚度最大。

对同心圆环, 因为其内外边界均为圆的等势线, 故可以对扭转刚度作叠加, 得

$$D = \frac{1}{2}\pi a_1^4 - \frac{1}{2}\pi a_2^4 = \frac{A^2}{2\pi} + Aa_2^2$$

其中 A 为圆环面积, $A = \pi(a_1^2 - a_2^2)$ 。

可知, 圆环内径越大, 扭转刚度越大。

6.5 带半圆槽圆杆的扭转



截面区域 G : $\begin{cases} 0 \leq r \leq 2a \cos \theta \\ r \geq \delta \end{cases} \quad (\theta \in [0, 2\pi), \delta < a)$

问题: $\begin{cases} \nabla^2 \psi = -2 \\ \psi|_{L_0} = 0 \end{cases} \quad (G)$

半逆解: 月牙形薄膜下方受压鼓起, 等势线很复杂.

由 $\psi|_{L_0} = 0$, ψ 应具有形式:

$$\psi = f(\delta, r, \theta) (r - \delta)(r - 2a \cos \theta)$$

ψ : 但 f 的具体形式并不好猜, 正确的结果为

$$f = -\frac{1}{2} \left(1 + \frac{\delta}{r} \right)$$

$$\text{此时 } \psi = \frac{1}{2} (\delta^2 - r^2) \left(1 - \frac{2a \cos \theta}{r} \right)$$

$$\text{极坐标下, } \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

可以验证, $\nabla^2 \psi = -2$

$$\text{扭转刚度: } D = 2 \iint_G \psi \, dx \, dy$$

$$= \iint_G (\delta^2 - r^2) \left(1 - \frac{2a \cos \theta}{r} \right) \, dx \, dy$$

$$= \iint_G \left(\delta^2 \left(1 - \frac{2a \cos \theta}{r} \right) - r^2 + 2ar \cos \theta \right) \, dx \, dy$$

$$= \iint_{G^*} [a^2 - (x-a)^2 - y^2] \, dx \, dy + O(\delta^2)$$

其中 G^* 为补全了的圆截面

$$\approx \int_{r \leq a} (a^2 - r^2) r \, dr \, d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \pi a^4$$

可知, 有槽口的圆杆与圆杆的扭转刚度差不多.

注: 上面略去的项为

$$\iint_{G^* - G} [a^2 - (x-a)^2 - y^2] \, dx \, dy + \delta^2 \iint_G \left(1 - \frac{2a \cos \theta}{r} \right) \, dx \, dy$$

第一项被积部分有界, 积分区域面积在 δ^2 量级, 故为 $O(\delta^2)$ 项

$$| \text{第二项} | \leq \delta^2 \left| \iint_{G^*} 1 - \frac{2a \cos \theta}{r} \, dx \, dy \right|$$

$$= \delta^2 \cdot 3\pi a^2$$

$$= O(\delta^2)$$

11/10

剪应力: 沿坐标线 $r = \text{const.}$ 有

逆时针转 90° 对 Ψ
求导.

$$\tau_s = -\mu\alpha \frac{\partial \Psi}{\partial r} = \mu\alpha \left[r - a \left(1 + \frac{\delta^2}{r^2} \right) \cos\theta \right]$$

$$\tau_n = \mu\alpha \frac{\partial \Psi}{\partial r \partial \theta} = -\mu\alpha a \left(1 - \frac{\delta^2}{r^2} \right) \sin\theta$$

在边界 $r = \delta$ 上,

$$\tau_s = -\mu\alpha (2a \cos\theta - \delta)$$

$$\tau_n = 0$$

最大剪应力为 $\mu\alpha (2a - \delta)$,
位置 $(\delta, 0)$

在边界 $r = 2a \cos\theta$ 上,

$$\tau = \mu\alpha a \left(1 - \frac{\delta^2}{r^2} \right)$$

最大剪应力为 $\mu\alpha a \left(1 - \frac{\delta^2}{4a^2} \right)$, 位置 $(2a, 0)$

综合, 截面最大剪应力

$$\tau_{\max} = \mu\alpha (2a - \delta) \approx 2\mu\alpha a$$

其中 $\mu\alpha = \frac{M_0}{D}$, 与圆截面的值相差不大。

可知, 带半圆槽柱体的最大剪应力约为无槽柱体的两倍。

注: 上述计算表明, 微小的缺陷对构件的刚度影响不大, 但对强度影响很大。

2° 在边界 $r = \delta$ 与边界 $r = 2a \cos\theta$ 的交点处, $\tau = 0$ 。

一般地, 扭转问题在截面的尖点处剪应力为 0。
(外凸)

6.6 矩形截面杆的扭转.

截面区域 G : $\begin{cases} |x| \leq a \\ |y| \leq b \end{cases}$

问题: $\begin{cases} \nabla^2 \Psi = -2 \\ \Psi|_{L_0} = 0 \end{cases} \quad (G)$

Ψ : 作辅助函数 $f = \Psi + y^2 - b^2$,

问题变成 ~~求 Ψ~~

$$\begin{cases} \nabla^2 f = 0 \\ f = 0 & (y = \pm b) \\ f = y^2 - b^2 & (x = \pm a) \end{cases}$$

用分离变量法, 设 $f(x, y) = X(x)Y(y)$ 是偶函数

$$\text{则 } \frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)}$$

$X(x)Y(y)$ 需要满足齐次边条件: (为了得到离散的指标)

$$X(x)Y(\pm b) = 0$$

∴ 对问题 $\frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda$, 仅当 $\lambda < 0$ 时, $Y(y)$ 为三角函数,

才能有非零的 ~~满足~~ 满足边条件的 $Y(y)$.

$$\therefore \text{记 } \frac{X''}{X} = k^2, \quad \begin{cases} \frac{Y''}{Y} = -k^2 \end{cases} \quad (k > 0)$$

$$\therefore \begin{cases} X(x) = A \operatorname{sh}(kx) + B \operatorname{ch}(kx) \\ Y(y) = C \sin(ky) + D \cos(ky) \end{cases}$$

$$\therefore Y(\pm b) = 0$$

Y 是偶函数

$$\therefore \begin{cases} C = 0 \\ k_n = \frac{\pi}{b}(n + \frac{1}{2}) \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \end{cases}$$

叠加分离变量解, 得

$$f(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} [A_n \operatorname{sh}(k_n x) + B_n \operatorname{ch}(k_n x)] \cos(k_n y)$$

$$\therefore f(a, y) = \sum_{n=0}^{\infty} [A_n \operatorname{sh}(k_n a) + B_n \operatorname{ch}(k_n a)] \cos(k_n y) = y^2 - b^2$$

$$f(-a, y) = \sum_{n=0}^{\infty} [A_n \operatorname{sh}(k_n a) + B_n \operatorname{ch}(k_n a)] \cos(k_n y) = y^2 - b^2$$

$$\therefore \sum_{n=0}^{\infty} A_n \operatorname{sh}(k_n a) \cos(k_n y) = 0$$

由系级数的完备性, 得 $A_n \operatorname{sh}(k_n a) = 0$

$$\text{即 } A_n = 0 \quad (n = 0, 1, \dots)$$

$$\therefore f(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \operatorname{ch}(k_n x) \cos(k_n y)$$

$$\text{且 } \sum_{n=0}^{\infty} B_n \operatorname{ch}(k_n a) \cos(k_n y) = y^2 - b^2$$

$$\text{解得 } B_n = (-1)^{n+1} \frac{32b^2}{(2n+1)^3 \pi^3} \frac{1}{\operatorname{ch}(k_n a)}$$

得到应力函数

$$\psi = b^2 - y^2 - \frac{32b^2}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} \frac{\operatorname{ch}(k_n x)}{\operatorname{ch}(k_n a)} \cos(k_n y)$$

共轭函数: $\psi = \Psi + \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$

$$= b^2 + \frac{1}{2}(x^2 - y^2) - \frac{32b^2}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} \frac{\text{ch}(knx)}{\text{ch}(kna)} \cos(kny)$$

翘曲函数: $\varphi = -xy + \frac{32b^2}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} \frac{\text{sh}(kny)}{\text{ch}(kna)} \sin(kny)$

$$(\because \varphi = -\text{Im}\{\psi(z, 0)\})$$

剪应力: $\tau_{zx} = \mu \alpha \frac{\partial \Psi}{\partial y}$

$$= \mu \alpha \left[-2y + \frac{16b}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \frac{\text{ch}(knx)}{\text{ch}(kna)} \sin(kny) \right]$$

$$\tau_{zy} = -\mu \alpha \frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

$$= \mu \alpha \frac{16b}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \frac{\text{sh}(kny)}{\text{ch}(kna)} \cos(kny)$$

在边界 $y=b$ 上

$$\tau_{zx} = -2\mu \alpha b \left[1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \frac{\text{ch}(knx)}{\text{ch}(kna)} \right]$$

对 x^2 在 $[-\pi, \pi]$ 上作傅里叶

$$\text{展开: } x^2 = \frac{1}{3}\pi^2 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^2} \cos(kx)$$

令 $x=\pi$ 得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\text{则 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \frac{\pi^2}{24}$$

$$\text{得 } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{1}{2}\pi^2 - \frac{1}{24}\pi^2 = \frac{1}{8}\pi^2$$

$$\text{因为 } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

所以在 $x=\pm a$ 时, $\tau_{zx}=0$, 且 $|\tau_{zx}|$ 随 $|x|$ 在 $[0, a]$ 上增加而减少.

所以边界 $y=b$ 的最大剪应力在 $x=0$ 处达到

$$\tau_{\max_1} = 2\mu \alpha b \left[1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2 \text{ch}(kna)} \right]$$

在边界 $x=a$ 上

$$\tau_{zy} = \frac{16\mu \alpha b}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \text{th}(kna) \cos(kny)$$

~~$$\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} = 0, \text{ 得}$$~~

~~$$\frac{16\mu \alpha b}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n k_n}{(2n+1)^2} \text{th}(kna) \sin(kny) = 0$$~~

~~由三角函数 $\{\sin(kny)\}$ 的完备性~~

因为解法没有预设 $a \geq b$, 所以边界 $x=a$ 上的 τ_{zy} 应与边界

$y=b$ 上的 τ_{zx} 有完全相同的形式, 自然有最大剪应力在 $y=0$

$$\text{处达到, } \tau_{\max_2} = \frac{16\mu \alpha b}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \text{th}(kna)$$

~~$$2\mu \alpha a \left[1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2 \text{ch}(knb)} \right]$$~~

可以算得, 当 $a \geq b$ 时,

$$\frac{\partial}{\partial a} (\tau_{\max_1} - \tau_{\max_2}) > 0$$

且当 $a=b$ 时, 由对称性知 $\tau_{\max_1} = \tau_{\max_2}$

\therefore 在 $a > b$ 时, $\tau_{\max_1} > \tau_{\max_2}$, 即最大剪应力出现长边中点上。

$$\text{扭转刚度 } D = 2 \iint_G \Psi dx dy$$

$$= \frac{16}{3} ab^3 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1024 b^4}{(2n+1)^5 \pi^5} \operatorname{th}(k_n a)$$

当 $a \gg b$ 时, $D \approx \frac{1}{3} l \delta^3$, 其中 $l = 2a$, $\delta = 2b$ 。

此即为薄壁杆件的扭转刚度。

6-7 薄膜比拟

刚性边界 L 上的薄膜, 预张力为 q , 在向上的均布压力 P 作用下, 横向位移 $w(x, y)$ 满足问题

$$\begin{cases} \nabla^2 w = -\frac{P}{q} & (G) \\ w|_{L_i} = f_i(s) & (i=0, 1, 2, \dots) \end{cases}$$

其中 $f_i(s)$ 是给定的函数。

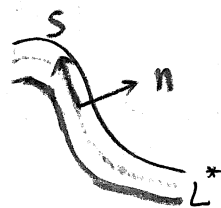
可知, $w \propto \Psi$, 从 w 可以得到对 Ψ 的直观认识。

并且, 从 $D = 2 \left(\iint_G \Psi dx dy + \sum_i C_i A_i \right)$ 可知, 扭转刚度正比于薄膜与外边界平面间的体积 (多连通区域包含内部孔洞区域)。

6-8 薄壁杆件的扭转。

① 开口薄壁杆件

图示开口薄壁杆件的一部分, 虚线 L^* 为截面中线, 线长为 l 。 L^* 的切向 \vec{s} 和法向 \vec{n} 如图示。杆件厚度为常值 δ , 设 $\delta \ll l$ 。



$$L^* \text{ 方程: } (x, y) = (f(s), g(s)) \quad (0 \leq s \leq l)$$

$$\text{区域 } G \text{ 方程: } (x, y) = (f(s) + \eta g'(s), g(s) - \eta f'(s)) \quad \begin{pmatrix} 0 \leq s \leq l \\ |\eta| \leq \frac{1}{2} \delta \end{pmatrix}$$

在把 δ 视为小量时, 问题近似地化为

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \eta^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial s^2} = -2 & (G) \\ \Psi|_{L^*} = 0 \end{cases}$$

其中 ρ 为曲率半径

假定 $\delta \ll \rho$, 则有近似解

$$\Psi = \left(\frac{\delta}{2}\right)^2 - \eta^2, \text{ 即为高度为厚度平方阶的抛物线.}$$

扭转刚度: 变换 $(x, y) \rightarrow (\eta, s)$ 的 Jacobi 行列式为

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} g' & -f' \\ f' + \eta g'' & g' - \eta f'' \end{vmatrix}$$

$$= (f')^2 + (g')^2 + \eta/\rho$$

$$\approx 1$$

$$\text{得到 } D = 2 \iint_{\Omega} \Psi dx dy$$

$$= 2 \int_0^1 \int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} \left[\left(\frac{\delta}{2}\right)^2 - \eta^2 \right] J d\eta ds$$

$$= \frac{1}{3} \delta^3$$

即薄壁杆件的扭转刚度和狭矩形截面杆的相当。

$$\text{切应力 } \tau_s = -\mu \alpha \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} = 2\mu \alpha \eta$$

$$\tau_n = \mu \alpha \frac{\partial \Psi}{\partial s} = 0$$

即剪应力沿法向线性分布, 在中线上为零。

中心线上的翘曲函数:

$$\therefore \frac{\partial \varphi}{\partial x} = y + \frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad , \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -x - \frac{\partial \Psi}{\partial y}$$

$$\text{在中心线上, } \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0$$

$$\therefore \frac{\partial \varphi}{\partial x} = y, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -x$$

$$\therefore \frac{\partial \varphi}{\partial s} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cos \langle \vec{s}, \vec{x} \rangle + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cos \langle \vec{s}, \vec{y} \rangle$$

$$= -[x \cos \langle \vec{n}, \vec{x} \rangle + y \cos \langle \vec{n}, \vec{y} \rangle]$$

$$= -r_n$$

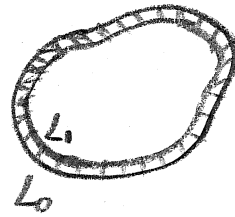
其中 $r_n = \vec{r} \cdot \vec{n}$, 为矢径 \vec{r} 在 \vec{n} 上的投影

$$\therefore \varphi = \varphi_0 - \int_0^s r_n ds = \varphi_0 - 2A(s)$$

其中 $A(s)$ 为扇形面积。

② 闭口薄壁杆件

闭口薄壁杆件截面如图所示, 壁厚为 δ , 是个常数。 L_1 所围成面积为 A_1 。



问题: $\nabla^2 \Psi = -2 \quad (G)$

$$\begin{cases} \Psi|_{L_0} = 0, \Psi|_{L_1} = C_1 \\ \oint_{L_1} \frac{\partial \Psi}{\partial n} ds = 2A_1 \end{cases}$$

Ψ : 因为壁厚很薄, 依据薄膜比拟可知, Ψ 可近似地看成沿径向线性变化的函数。

则 $\frac{\partial \Psi}{\partial n} = \frac{C_1}{\delta}$

由单值性条件得

$$\oint_{L_1} \frac{C_1}{\delta} ds = 2A_1, \text{ 即 } C_1 = \frac{2A_1 \delta}{l_1}, \text{ 其中 } l_1 \text{ 为 } L_1 \text{ 的长度。}$$

所以 $\Psi = -\frac{2A_1}{l_1} \left(\eta - \frac{\delta}{2} \right)$

扭转刚度 $D = 2 \left(\iint_G \Psi dx dy + A_1 C_1 \right)$

$$= C_1 A + 2A_1 C_1$$

其中 A 为 G 的面积。考虑到 $A \ll A_1$, 近似地有

$$D = 2C_1 A_1 = \frac{4A_1^2 \delta}{l_1}$$

比扭转角 $\alpha = \frac{M_z}{\mu D} = \frac{l_1 M_z}{4\mu A_1^2 \delta}$

剪应力 $\tau = |\tau_s| = \left| -\mu \alpha \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \right|$

$$= \mu \alpha \frac{2A_1}{l_1}$$

$$= \frac{M_z}{2A_1 \delta}$$

注: 1° 对闭口薄壁圆管 $D_{\text{闭}} = 2\pi r^3 \delta$

对开口薄壁圆管 $D_{\text{开}} = \frac{2}{3} \pi a \delta^3$

得 $\frac{D_{\text{开}}}{D_{\text{闭}}} = \frac{1}{3} \left(\frac{\delta}{a} \right)^2$, 是 $\frac{\delta}{a}$ 的二阶量。

2° 对 1° 中结论的比拟法解释:

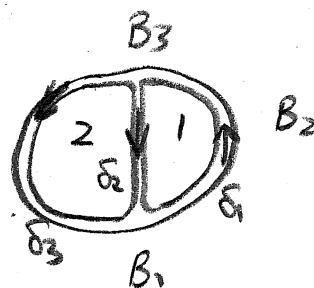
$\therefore C_1 = \frac{2A_1}{l_1} \delta = O(\delta)$, 面积 $A_{\text{闭}} = O(1) \Rightarrow$ 膜下体积 $= O(\delta)$

对开口 $\Psi \sim \frac{1}{2} \delta^2 = O(\delta^2)$, 面积 $A_{\text{开}} = O(\delta) \Rightarrow$ 膜下体积 $= O(\delta^3)$

即表示 $D_{\text{闭}}$ 与 $D_{\text{开}}$ 相差 δ^2 的两个量级。

③ 多室薄壁杆件

如图所示, 各段正方向已标出.



问题:
$$\begin{cases} \nabla^2 \Psi = -2 & (G) \\ \Psi|_{L_0} = 0 \\ \Psi|_{L_i} = C_i & (i=1,2) \\ \oint_{L_i} \frac{\partial \Psi}{\partial n^+} ds = 2A_i & (i=1,2) \end{cases}$$

$$\Psi: \begin{cases} \frac{C_1}{\delta_1} l_1 + \frac{C_1 - C_2}{\delta_2} l_2 = 2A_1 \\ \frac{C_2}{\delta_3} l_3 + \frac{C_2 - C_1}{\delta_2} l_2 = 2A_2 \end{cases}$$

可解得 C_1, C_2 .

由于是薄壁杆件, 可以以为 Ψ 沿横向(\vec{n}) 线性变化。

扭转刚度 $D = 2 \left(\iint_G \Psi dx dy + A_1 C_1 + A_2 C_2 \right)$
 $\approx 2(A_1 C_1 + A_2 C_2)$

剪应力:
$$\begin{aligned} l_1: \quad \tau_1 &= -\mu \alpha \frac{\partial \Psi}{\partial n} = \mu \alpha \frac{C_1}{\delta_1} \\ l_2: \quad \tau_2 &= -\mu \alpha \frac{\partial \Psi}{\partial n} = \mu \alpha \frac{C_1 - C_2}{\delta_2} \\ l_3: \quad \tau_3 &= -\mu \alpha \frac{\partial \Psi}{\partial n} = \mu \alpha \frac{C_2}{\delta_3} \end{aligned}$$

可列 $\tau_1 \delta_1 = \tau_2 \delta_2 + \tau_3 \delta_3$

6.9 扭转刚度的上下界定理.

上界定理: $\forall f(x, y): I(f) \geq I(\varphi)$

其中 $I(f) = \iint_G \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x} - y \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} + x \right)^2 \right] dx dy$.

φ 是问题 $\nabla^2 \varphi = 0 \quad (G)$

$\frac{d\varphi}{dn} = y \cos \langle \vec{n}, \vec{x} \rangle - x \cos \langle \vec{n}, \vec{y} \rangle \quad (L)$

的解, $D = I(\varphi)$.

下界定理: $\forall g(x,y)$, 若 $\begin{cases} g = 0 & (L_0) \\ g = g_i & (L_i: i=1, \dots, m) \end{cases}$

$$\text{则 } J(g) \leq J(\psi)$$

$$\text{其中 } J(g) = \iint_G [4g - (\frac{\partial g}{\partial x})^2 - (\frac{\partial g}{\partial y})^2] dx dy + 4 \sum_{i=1}^m g_i A_i$$

$$\psi \text{ 是问题 } \begin{cases} \nabla^2 \psi = -2 & (G) \\ \psi|_{L_0} = 0 \\ \psi|_{L_i} = c_i & (i=1, \dots, m) \\ \oint_{L_i} \frac{\partial \psi}{\partial n} ds = 2A_i \end{cases}$$

的解, $D = J(\psi)$

上下界基本定理: $J(g) \leq D \leq I(f)$

证明: (上界定理)

用翘曲函数 ψ 表示的扭转刚度为

$$D = \iint_G (x^2 + y^2 + x \frac{\partial \psi}{\partial y} - y \frac{\partial \psi}{\partial x}) dx dy$$

$$\text{设 } I_1(\psi) = \iint_G \frac{\partial \psi}{\partial x} (\frac{\partial \psi}{\partial x} - y) + \frac{\partial \psi}{\partial y} (\frac{\partial \psi}{\partial y} + x) dx dy$$

$$\text{则 } I(\psi) - I_1(\psi) = \iint_G -y \frac{\partial \psi}{\partial x} + y^2 + x \frac{\partial \psi}{\partial y} + x^2 dx dy = D$$

$$\begin{aligned} \therefore I_1(\psi) &= \iint_G \frac{\partial \psi}{\partial x} (\frac{\partial \psi}{\partial x} - y) + \frac{\partial \psi}{\partial y} (\frac{\partial \psi}{\partial y} + x) + \psi (\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}) dx dy \\ &= \iint_G \frac{\partial}{\partial x} [\psi (\frac{\partial \psi}{\partial x} - y)] + \frac{\partial}{\partial y} [\psi (\frac{\partial \psi}{\partial y} + x)] dx dy \\ &= \oint \psi (\frac{\partial \psi}{\partial x} - y) \cos \langle \vec{n}, \vec{x} \rangle + \psi (\frac{\partial \psi}{\partial y} + x) \cos \langle \vec{n}, \vec{y} \rangle ds \\ &= \oint \psi (\frac{\partial \psi}{\partial n} - y \cos \langle \vec{n}, \vec{x} \rangle + x \cos \langle \vec{n}, \vec{y} \rangle) ds \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\therefore I(\psi) = D$$

$$\text{记 } \tilde{\varphi}(x,y) = f(x,y) - \psi(x,y)$$

$$\text{则 } I(f) = \iint_G [(\frac{\partial \psi}{\partial x} - y + \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial x})^2 + (\frac{\partial \psi}{\partial y} + x + \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial y})^2] dx dy$$

$$= I(\varphi) + 2 \iint_G \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \gamma \right) + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + x \right) \right] dx dy \\ + \iint_G \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy$$

类似地可证第二项为零, 而第三项非负.

$$\therefore I(f) \geq I(\varphi). \quad \square.$$

(下界定理)

$$D = 2 \iint_G \Psi dx dy + 2 \sum_{i=1}^m c_i A_i$$

$$\text{设 } J_1(\Psi) = \iint_G \left(\frac{\partial}{\partial x} (\Psi \frac{\partial \Psi}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (\Psi \frac{\partial \Psi}{\partial y}) \right) dx dy \\ - 2 \sum_{i=1}^m c_i A_i$$

$$J_1(\Psi) + J(\Psi) = \iint_G 4\Psi + \Psi \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \right) dx dy \\ + 2 \sum_{i=1}^m c_i A_i$$

$$= 2 \iint_G \Psi dx dy + 2 \sum_{i=1}^m c_i A_i$$

$$= D$$

$$\therefore J_1(\Psi) = \sum_{i=1}^m \oint_{L_i} \Psi \left(\underbrace{\frac{\partial \Psi}{\partial x}}_{\cos \langle \vec{n}^+, \vec{x} \rangle} + \underbrace{\frac{\partial \Psi}{\partial y}}_{\cos \langle \vec{n}^+, \vec{y} \rangle} \right) ds$$

$$- 2 \sum_{i=1}^m c_i A_i$$

$$= \sum_{i=1}^m \oint_{L_i} c_i \frac{\partial \Psi}{\partial n^+} ds - 2 \sum_{i=1}^m c_i A_i$$

$$= 0$$

$$\therefore D = J(\Psi)$$

$$\text{设 } \tilde{\Psi} = g - \Psi, \quad \tilde{c}_i = g_i - c_i$$

$$J(g) = \iint_G \left[4(\Psi + \tilde{\Psi}) - \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy$$

$$+ 4 \sum_{i=1}^m (c_i + \tilde{c}_i) A_i$$

$$= J(\Psi) + 2 \left\{ \iint_G \left[2\tilde{\Psi} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial x} - \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial y} \right] dx dy \right.$$

$$\left. + 2 \sum_{i=1}^m \tilde{c}_i A_i \right\} - \iint_G \left(\frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial y} \right)^2 dx dy$$

类似地可证, 第二项为0, 而第三项非正.

$$\therefore J(\varphi) \leq J(\psi) \quad \square.$$