第二章 分离变量法

I、有界弦的自由振动（两端固定，混合问题）

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & (0<x<l,\ t>0) \\ u(t,0) = u(t,l) = 0 \\ u(0,x) = \varphi(x), \quad u_t(0,x) = \psi(x) \end{cases}$$

1、分离变量

$$T'' + \lambda a^2 T = 0$$

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 & (0<x<l) \\ X(0) = X(l) = 0 \end{cases}$$

2、固有值 $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \quad (n=1,2,3,\cdots)$

固有函数 $X_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{l} \qquad T_n(t) = C_n\cos\frac{n\pi a t}{l} + D_n\sin\frac{n\pi a t}{l}$

3、解 $u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n\cos\frac{n\pi a t}{l} + D_n\sin\frac{n\pi a t}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l}$

其中 $C_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx$

$D_n = \frac{2}{n\pi a}\int_0^l \psi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx$

II、极坐标下 $\Delta_2 u = 0$ 的边值问题

$$\begin{cases} \Delta_2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0 \\ u(r,\theta) = u(r,\theta+2\pi) \end{cases}$$

1、分离变量

$$r^2R''(r) + rR'(r) - \lambda R(r) = 0$$

$$\begin{cases} \Theta'' + \lambda\Theta(\theta) = 0 \\ \Theta(\theta) = \Theta(\theta+2\pi) \end{cases}$$

2、固有值 $\lambda_k = k^2 \quad (k=0,1,2,\cdots)$

固有函数 $\Theta_0(\theta) = C_0$

$\Theta_k(\theta) = C_k\cos k\theta + D_k\sin k\theta$

$R_0(r) = A_0 + B_0\ln r$

$R_k(r) = A_k r^k + B_k r^{-k}$

3、解 $u(r,\theta) = A_0 + B_0\ln r + \sum_{k=1}^{\infty}(A_k r^k + B_k r^{-k})(C_k\cos k\theta + D_k\sin k\theta)$

固有值理论（斯图模－刘维尔理论）

对一般的二阶齐次线性偏微分方程：

$$L_t u + C(t) L_x u = 0 \quad (a \le x \le b,\ t \in I)$$

其中 $L_t = a_0(t)\frac{\partial^2}{\partial t^2} + a_1(t)\frac{\partial}{\partial t} + a_2(t)$

$L_x = b_0(x)\frac{\partial^2}{\partial x} + b_1(x)\frac{\partial}{\partial x} + b_2(x)$

1° 分离变量 $\quad L_x X(x) + \lambda X(x) = 0 \quad$ ⓐ

$L_t T(t) - \lambda C(t) T(t) = 0$

2° S-L 方程化 $\quad$ 记ⓐ为 $\quad b_0(x)y''(x) + b_1(x)y'(x) + b_2(x)y(x) + \lambda y(x) = 0$

令 $\rho(x) = \frac{1}{b_0(x)} \exp\{\int \frac{b_1(x)}{b_0(x)} dx\}$.

则 $[\rho(x) b_0(x)]' = \rho(x) b_1(x)$.

有 $\quad \rho(x) b_0(x) y''(x) + [\rho(x) b_0(x)]' y'(x) + b_2(x)\overset{\rho(x)}{\vee} y(x) + \lambda \overset{\rho(x)}{\vee} y(x) = 0$

得

$$\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{dy}{dx}\right) - q(x)y + \lambda \rho(x) y = 0 \quad \text{(S-L 方程)}$$

其中 $k(x) = \rho(x) b_0(x)$ ，$-q(x) = \rho(x) b_2(x)$.

S-L 固有值问题

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{dy}{dx}\right) - q(x)y + \lambda\rho(x)y = 0 \quad (a<x<b). \\ \text{关于端点 } a,b \text{ 的边界条件之一} \end{cases}$$

条件：1) $k(x) \in C^1([a,b])$ ，$\rho(x) \in C^0([a,b])$ ，

$q(x) \in C^0((a,b))$

2) $\forall x \in (a,b)$ ，$k(x) > 0$ ，$\rho(x) > 0$ ，$q(x) \ge 0$.

a,b 至多为 $k(x)$，$\rho(x)$ 的 1 级零点，

a,b 至多为 $q(x)$ 的 1 级极点。

边界条件：①～③ $\quad$ 当 $k(a) > 0$ （或 $k(b) > 0$），且 $q(x)$ 在 a 点（或 b 点）连续时，

u 有第一、二、三类边界条件：$(\alpha, \beta \ge 0)$

$(\alpha_1 u_x - \beta_1 u)|_{x=a} = 0 \quad$ （或 $(\alpha_2 u_x + \beta_2 u)|_{x=b} = 0$）

④ $\quad$ 当 $k(a) = k(b) > 0$ 时，

u 有周期性边界条件：

$y(a) = y(b)$ ，$y'(a) = y'(b)$

⑤ $\quad$ 当 $k(a) = 0$ （或 $k(b) = 0$）时，

No.

Date

则a有有界性条件（自然边界条件）：

$$|y(a)| < +\infty \quad (或\ |y(b)| < +\infty)$$

（理论依据：定理：若$y_1(x)$和$y_2(x)$是S-L方程的两个线性无关解，且$\lim_{x\to a} y_1(x)$ = 有限值，则$y_2(x)$在a点附近无界。）

S-L定理：若系数$k(x)$，$q(x)$，$\rho(x)$满足条件，则上述S-L固有值问题的固有值λ和固有函数$y_\lambda(x)$具有下列性质：

1）可数性：存在可数无穷多个固有值$\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n < \cdots$，且$\lim_{n\to+\infty} \lambda_n = +\infty$；

与每一个固有值相应的线性无关的固有函数有且只有一个（不适用于周期性边界条件）；

2）非负性：$\lambda_n \geq 0$；

有$\lambda=0$的充要条件是$q(x) \equiv 0$，且a，b两端都不取第一、三类边界条件。此时对应的固有函数为常数。

3）正交性：若λ_m，λ_n是任两个不同的固有值，则相应的固有函数$y_m(x)$，$y_n(x)$在$[a,b]$上带权$\rho(x)$正交，即

$$\int_a^b \rho(x)\, y_m(x)\, y_n(x)\, dx = 0$$

4）完备性：固有函数系$\{y_n(x)\}$是完备的，即

对于任意一个有一阶连续导数及分段二阶连续导数的函数$f(x)$，只要它满足相应边界条件，则它可按固有函数系$\{y_n(x)\}$展开成绝对且一致收敛的广义富里叶级数，

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n\, y_n(x)$$

$$其中\ f_n = \frac{1}{\|y_n(x)\|^2} \int_a^b \rho(x)\, f(x)\, y_n(x)\, dx,$$

$\|y_n(x)\|^2 \equiv \int_a^b \rho(x)\, y_n^2(x)\, dx$是函数$y_n(x)$模的平方。

注：若$\forall x \in [a,b]$，$k(x)$，$\rho(x) > 0$，则称S-L方程为正则的；

若存在$x=a$或$x=b$，s.t. $k(x)=0$或$\rho(x)=0$，则称S-L方程是奇异的。

上述可数性和完备性只适用于正则型固有值问题。

No.

Date

非齐次情况：1° 边界条件齐次，泛定方程非齐次。

$$
\text{I}:\begin{cases}
L_t u + L_x u = f(t,x) & (t>0,\ x_1<x<x_2) \\
\alpha_1 u_x(t,x_1) - \beta_1 u(t,x_1) = 0, & \alpha_2 u_x(t,x_2) + \beta_2 u(t,x_2) = 0 \\
u(0,x) = \varphi(x), & u_t(0,x) = \psi(x)
\end{cases}
$$

其中 $\alpha, \beta \geq 0$

求解方法：① 固有函数法

1° 写出相应齐次问题，用分离变量法求出其固有值和固有函数。

2° 把原问题的解表示成固有函数的级数形式（如对 $\{X_n(x)\}$）

3° 解关于系数函数（如 $T_n(t)$）的定解问题

② 齐次化原理法

2° 边界条件非齐次

求解方法：1° 找一个函数 $v(t,x) = A(t)x + B(t)$ 或 $v(t,x) = A(t)x^2 + B(t)$，使之只满足边界条件

2° 找出与 $v(t,x)$ 关于原定解问题互补的问题的解 $w(t,x)$

3° $u = v + w$

缺点：1° 复杂，2° $v(t,x)$ 的物理意义不清楚

特殊的求解方法：1° 找出 v 满足泛定方程和边界条件

2° 找出互补的 w

3° $u = v + w$

3° 泊松方程

求解方法：1° 找出 v 只满足泊松方程

2° 找出互补的拉普拉斯边值问题的解 w

3° $u = v + w$