奇解与包络

定义：设一阶微分方程 $F(x,y,\frac{dy}{dx})=0$ 有特解 $\Gamma: y=\varphi(x), (x\in J)$。
如果对 $\forall Q\in\Gamma$，$\forall U(Q)$，微分方程有不同于Γ的解在Q与Γ相切，
则称Γ是微分方程的奇解。

定义：设单参数曲线族 $K(C): V(x,y,C)=0$，其中 $V(x,y,C)$ 对 $(x,y,C)\in D$ 连续可微。
对于一条连续可微曲线Γ，如果 $\forall q\in\Gamma$，$\exists K(C^*)$ 在q点与Γ相切，且 $\exists U(q)$，
使 $K(C^*)\neq\Gamma$。
则称Γ为 $K(C)$的一支包络。

定理：1° 奇解是通解的包络。

2° 通解的包络是奇解。

定理：（奇解的必要条件：p-判别式）

函数 $F(x,y,p)$ 对 $(x,y,p)\in G$ 连续，$(p=\frac{dy}{dx})$，且有连续偏微商 F'_y, F'_p。
若 $y=\varphi(x)$ $(x\in J)$ 是$\underbrace{\text{微分方程的}}_{F(x,y,p)=0}$一个奇解，且 $(x,\varphi(x),\varphi'(x))\in G$，$(x\in J)$，
则 $\varphi(x)$满足 p-判别式：

$$\begin{cases} F(x,y,p)=0 \\ F'_p(x,y,p)=0 \end{cases}$$

定理：（奇解的充分条件）

函数 $F(x,y,p)$ 对 $(x,y,p)\in G$ 二阶连续可微。
若满足 p-判别式的函数 $y=\psi(x)$ $(x\in J)$ 是$\underbrace{\text{微分方程的}}_{F(x,y,p)=0}$解，

且
$$\begin{cases} F'_y(x,\psi(x),\psi'(x))\neq 0 \\ F'_p(x,\psi(x),\psi'(x))=0 \\ F''_{pp}(x,\psi(x),\psi'(x))\neq 0 \end{cases} \quad (x\in J)$$

则 $y=\psi(x)$是微分方程的奇解。

定理：（包络的必要条件：C-判别式）

曲线族 $K(C)$的包络Γ满足 C-判别式：

$$\begin{cases} V(x,y,C)=0 \\ V'_C(x,y,C)=0 \end{cases}$$

定理：（包络的充分条件）

若满足C-判别式的一支连续可微且不含于族 $K(C)$ 的曲线

$$\Lambda:\ x=\varphi(C),\quad y=\psi(C),\quad (C\in J)$$

满足
$$\begin{cases}(\varphi'(C),\ \psi'(C)) \neq (0,0)\\ (V'_x,\ V'_y) \neq (0,0)\end{cases}$$

其中 $V'_x = V'_x(\varphi(C),\psi(C),C)$，$V'_y=V'_y(\varphi(C),\psi(C),C)$

且Λ是 $K(C)$ 的一支包络。