

固体力学实验.

一、量纲分析

1. 相似系数: 模型参数 / 原型参数. 记为 C .

2. 相似第一定理: 相似现象的相似指标为 1.

$$\left(\text{对 } F=ma, \text{ 相似第一定理的表现为 } f_i = \frac{C_F}{C_m C_a} = 1 \right)$$

等价定理: 相似现象的相似判据为不变量. (相似判据本质上是 π 数).

$$\left(\text{对 } F=ma, \text{ 上述命题表现为 } \frac{F_{\text{模}}}{M_{\text{模}} a_{\text{模}}} = \frac{F_{\text{原}}}{M_{\text{原}} a_{\text{原}}} \right)$$

~~每个方程提出一个相似指标,~~

~~相同量纲的量提取到一个相似系数, 如 $C_d = \frac{\lambda_m}{\lambda_p} = \frac{L_m}{L_p} = \left(\frac{I_m}{I_p} \right)^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{W_m}{W_p} \right)^{\frac{1}{3}}$.~~

3. 相似第二定理 (π 定理).

用 n 个物理量表述的方程, 可以用 $(n-m)$ 个 π 数构成的函数表出.

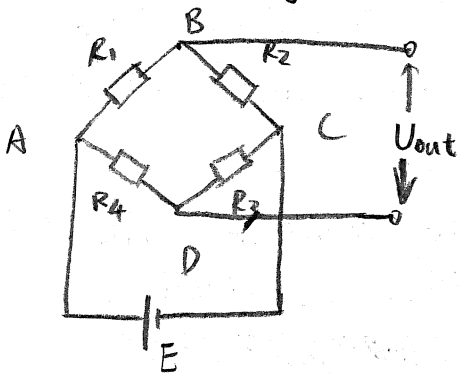
$$\phi(\pi_1, \dots, \pi_{n-m}) = 0.$$

注: π 数 (相似判据) 与相似指标一一对应, 反映了同一个关系.

2° 相似判据也就是工程流体力学里讲的相似准则数, 即 π 数.

二、传感器

1. Wheatstone Bridge 电路图



1° 电源电动势为 U , $U_{out} = U_D - U_B$

$$\text{算得 } U_{out} = \frac{R_1 R_3 - R_2 R_4}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)} U$$

2° 平衡条件

令 $U_{out} = 0$ 得 Wheatstone Bridge 平衡条件:

$$R_1 R_3 = R_2 R_4$$

3° 电压输出

电桥各电阻从平衡时各变化一小量, 已知初始时 $R_1 = R_2, R_3 = R_4$.

则输出电压

$$U_{out} = \frac{R_1 R_3 \left(\frac{\Delta R_1}{R_1} - \frac{\Delta R_2}{R_2} + \frac{\Delta R_3}{R_3} - \frac{\Delta R_4}{R_4} \right) + \text{h.o.t.}}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4) + \text{h.o.t.}} U$$

$$= \frac{U}{4} \left[\frac{\Delta R_1}{R_1} - \frac{\Delta R_2}{R_2} + \frac{\Delta R_3}{R_3} - \frac{\Delta R_4}{R_4} \right]$$

4° 应变测量

由应变-电阻效应 $\frac{dR}{R} = k \epsilon$, 其中 k 为灵敏系数

则应变与输出电压的关系

$$U_{out} = \frac{1}{4} k U (\epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_3 - \epsilon_4)$$

对于半桥电路, 且 R_1 为工作片, R_2 为补偿片时,

$$U_{out} = \frac{1}{4} k U (\epsilon + \epsilon_t - \epsilon_c) = \frac{1}{4} k U \epsilon$$

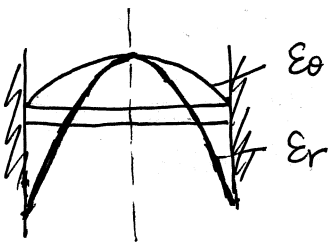
轴向拉伸下的桥路构造

编号	K	桥路构造	误差消除
1	1	$\left\langle \begin{array}{c} 1 \\ \blacksquare \end{array} \right\rangle$	无
2	2	$\left\langle \begin{array}{c} 1 \\ \hline 3 \end{array} \right\rangle$	弯曲
3	1+2	$\left\langle \begin{array}{c} 1 \\ \diagup 2 \end{array} \right\rangle$	温度
4	2(1+2)	$\left\langle \begin{array}{c} 1 \\ \diagup 2 \\ \hline 3 \\ \diagdown 4 \end{array} \right\rangle$	弯曲, 温度

弯曲下的桥路构造

编号	K	桥路构造	误差消除
1	1	$\begin{array}{c} 1 \\ \downarrow \end{array}$	无
2	2	$\begin{array}{c} 1 \\ \hline 2 \\ \downarrow \end{array}$	轴向、温度
3	4	$\begin{array}{c} 1 \\ \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline 4 \\ \downarrow \end{array}$	轴向、温度
4	2(1+2)	$\begin{array}{c} 1 \\ \diagup 2 \\ \hline 3 \\ \diagdown 4 \end{array} \downarrow$	轴向、温度

2. 周边固定的圆形膜片应变测量



1° 图示为周边固定的圆形膜片过圆心的一个剖面，膜片下部受均布荷载 P ，膜片上表面的环向应变 ϵ_θ 与径向应变 ϵ_r 沿轴向分布如图中曲线。

膜片中心处于均匀拉伸状态 $\epsilon_\theta = \epsilon_r > 0$ ；圆是端处膜片环向应变为 0，径向应变为负。 $\epsilon_\theta, \epsilon_r$ 沿轴向分布为抛物线型。

具体的，径向应变与环向应变分布公式：

$$\epsilon_r = \frac{3P}{8h^2E} (1-\mu^2)(r^2 - x^2)$$

$$\epsilon_\theta = \frac{3P}{8h^2E} (1-\mu^2)(r^2 - x^2)$$

2° 应变测量

1° 双片测定法

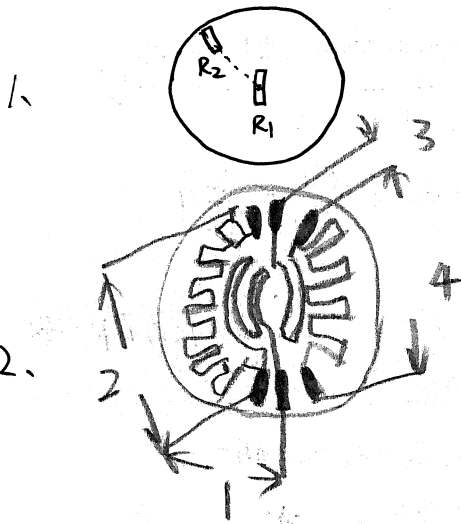
贴法如图 1。

2° 箔式应变花

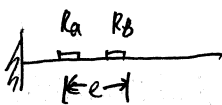
~~四片箔式应变花，接法如图 2。~~

为了提高灵敏度，专门有一种应变片，在近圆心处电阻环向布置，在近圆端处电阻轴向布置，如图 2，称为箔式应变花。

接成全桥电路，接法在图上已注明。



3. 双应变法



$$Q = \frac{dM}{dx} = \frac{M_a - M_b}{l}$$

因为 $\sigma_a = \frac{M_a}{W}$, $\epsilon = \frac{\sigma}{E}$

$$\therefore Q = \frac{\epsilon_a - \epsilon_b}{l} WE$$

三、信号调理采集与实数数据处理

1. 有效数字运算.

数字修约规则: 四舍六入五成双

1. "五成双"指的是如果尾数为5, 而后面没有数字或数字全是0, 则保证修约后最后一位是偶数——原来为奇数, 则5进位; 原来为偶数, 则舍去5.

2. 其它情况下, 保持"四舍五入"原则.

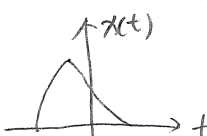
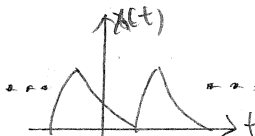
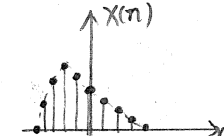
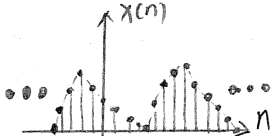
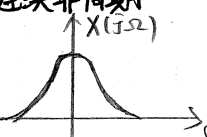
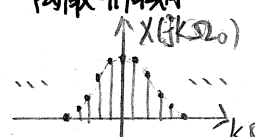
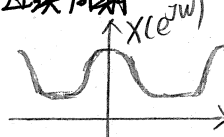
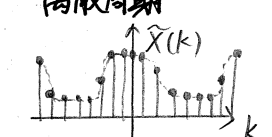
运算规则: 误差传递规律.

1. 加减法: 先按加减法有效数字保留方式修约, 再运算.

2. 乘除法: 先按乘除法有效数字保留方式修约, 再运算, 最后按同样的修约规则修约.

四. 数字信号处理基础

1. 四种傅立叶变换形式

	连续傅立叶变换 (FT)	傅立叶级数 (FS)	离散时间傅立叶变换 (DTFT)	离散傅立叶级数 (DFS)
时域	连续非周期  $X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\Omega t} dt$	连续周期  $X(jk\Omega_0) = \frac{1}{T_p} \int_{-T_p/2}^{T_p/2} x(t) e^{-jk\Omega_0 t} dt$	离散非周期  $X(e^{j\omega}) = \sum_{-\infty}^{+\infty} x(n) e^{-j\omega n}$	离散周期  $X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$
频域	连续非周期  $x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega$	离散非周期  $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(jk\Omega_0) e^{jk\Omega_0 t}$	连续周期  $x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$	离散周期  $x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j\frac{2\pi}{N}nk}$

注：事实上，第4种傅立叶变换形式是离散傅立叶变换 (DFT)，是从离散有限长序列变换至离散有限带宽序列。这里为了四种形式的对比，用的是离散傅立叶级数。

2° 傅里叶变换中，时域的离散性 \Rightarrow 频域的周期性。
 时域的周期性 \Rightarrow 频域的离散性。

因此，离散傅里叶级数完成了从离散时域到离散频域的变换。

而将有限长离散序列视为周期离散序列的主值区间（一个周期），应用离散傅里叶级数，可以将时域中有限长的离散序列变换到频域上有限带宽的离散序列——这就是离散傅里叶变换 (DFT)。离散的时域、频域信息使数值计算变得方便。

3° 离散傅里叶级数中， T_p ：信号周期 F ：频域抽样间隔（基频）

T ：时域抽样间隔 f_s ：采样频率

则 $f_s = \frac{1}{T}$ ， $F = \frac{1}{T_p}$ ， $T_p = NT$ ，其中 N 为每周期抽样点数。

2. 离散傅立叶变换 (DFT)

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j \frac{2\pi}{N} nk} \quad (0 \leq k \leq N-1)$$

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j \frac{2\pi}{N} nk} \quad (0 \leq n \leq N-1)$$

如果记旋转因子 $W = e^{-j \frac{2\pi}{N}}$, 则离散傅立叶变换变为

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W^{nk}$$

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W^{-nk}$$

例如, 对于四点序列, DFT 的形式为

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ X(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W^0 & W^0 & W^0 & W^0 \\ W^0 & W^1 & W^2 & W^3 \\ W^0 & W^2 & W^4 & W^6 \\ W^0 & W^3 & W^6 & W^9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ x(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ x(3) \end{bmatrix}$$

3. 傅立叶级数 (FS)

对任何周期信号, 只要满足 Dirichlet 条件, 就可以分解成直流分量和很多简谐振荡分量之和。这就是傅立叶级数。

这些简谐分量的最低角频率 $\Omega = \frac{2\pi}{T}$, T 为信号的周期, Ω 称为基频, 其它频率成分被称为高次谐波。

指数形式: $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n e^{jn\Omega t}$

$$F(n) = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) e^{-jn\Omega t} dt$$

三角形式: $f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\Omega t + b_n \sin n\Omega t)$

$$\begin{cases} a_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt \\ a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos n\Omega t dt \\ b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin n\Omega t dt \end{cases}$$

4. 傅立叶变换 (FT)

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

其中 $F(j\omega)$ 称为信号 $f(t)$ 的频谱, 或频谱密度。第二个等式称为信号 $f(t)$ 的频域分解式。若记 $F(j\omega) = |F(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)}$, 则 $|F(j\omega)|$ 称为幅度频谱, $\varphi(\omega)$ 称为相位频谱。

* 时移特性: $f(t-t_0) \leftrightarrow F(j\omega)e^{-j\omega t_0}$

函数时域中的时移, 对应于频谱在频域中产生相移, 即相位频谱变化 $-\omega t_0$, 而幅频特性不变。

频移特性: $F(j(\omega-\omega_0)) \leftrightarrow f(t)e^{j\omega_0 t}$

低频信号 $f(t)$ 的频谱在 $\omega=0$ 附近, 则将其乘以 $e^{j\omega_0 t}$, 就可以使其频谱搬移到 $\omega=\omega_0$ 附近。

特别的, $f(t)\cos\omega_0 t = f(t)\frac{1}{2}(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}) \leftrightarrow$
 $\frac{1}{2}[F(j(\omega-\omega_0)) + F(j(\omega+\omega_0))]$

5. Nyquist 抽样定理

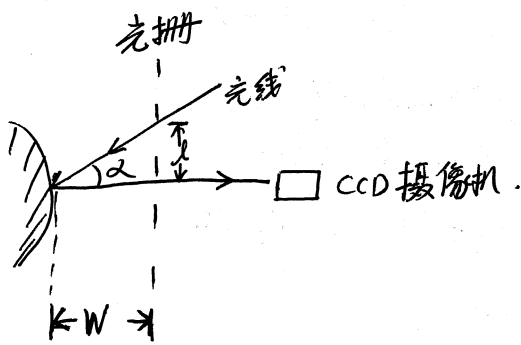
若连续信号 $x(t)$ 是有限带宽的, 其频谱的最高频率为 f_h , 对 $x(t)$ 抽样时, 若保证抽样频率 $f_s \geq 2f_h$, 那么可由 $x(nT_s)$ 恢复出 $x(t)$, 即 $x(nT_s)$ 保留了 $x(t)$ 的全部信息。

f_s 称为 Nyquist 频率, 或最小抽样频率。

常在抽样前作模拟低通滤波, 去掉高于 f_h 的频率的部分, 然后再抽样。

五 光测力学图像分析

1. 三步相移法.



由几何关系 $l = w \tan \alpha = n p$
 其中 p 为光栅常数, n 为条纹级数.

所以 $W = \frac{np}{\tan \alpha}$.

认为条纹级数加1, 相位上升了 2π , 则相位与离面位移间的关系为

$$W = \frac{\phi}{2\pi} \frac{p}{\tan \alpha}$$

假定测得光强具有形式 $I(x,y) = I_A(x,y) + A(x,y) \cos \phi(x,y)$.

I_A 为背景光强, A 为光强振幅, ϕ 为相位.

三步相移通过测量三次光强来确定每个点处的相位 $\phi(x,y)$. 通常条件下, 令相移步长 $\phi_0 = \frac{2\pi}{3}$. 则对每个点,

$$\begin{cases} I_0 = I_A + A \cos \phi \\ I_1 = I_A + A \cos(\phi + \frac{2\pi}{3}) \\ I_2 = I_A + A \cos(\phi + \frac{4\pi}{3}) \end{cases}$$

解得 $\phi = \arctan \frac{\sqrt{3}(I_2 - I_1)}{2I_0 - I_1 - I_2}$. 从一般式推导三步相移法的相位公式更简单.

(一般式) 令 $\phi_k = \frac{2\pi}{N} k$, ($k = 1, 2, \dots, N$). 则

$$\sum_{k=1}^N \sin \phi_k = 0, \quad \sum_{k=1}^N \cos \phi_k = 0, \quad \sum_{k=1}^N \sin 2\phi_k = 0, \quad \sum_{k=1}^N \cos 2\phi_k = 0.$$

$$\sum_{k=1}^N \sin \phi_k \cos \phi_k = 0, \quad \sum_{k=1}^N \cos^2 \phi_k = \sum_{k=1}^N \sin^2 \phi_k.$$

所以 $\sum_{k=1}^N I_k \sin \phi_k = \sum_{k=1}^N I_A \sin \phi_k + A \cos \phi \sum_{k=1}^N \cos \phi_k \sin \phi_k - A \sin \phi \sum_{k=1}^N \sin^2 \phi_k$
 $= -A \sin \phi \sum_{k=1}^N \sin^2 \phi_k$

$$\sum_{k=1}^N I_k \cos \phi_k = \sum_{k=1}^N I_A \cos \phi_k + A \cos \phi \sum_{k=1}^N \cos^2 \phi_k - A \sin \phi \sum_{k=1}^N \sin \phi_k \cos \phi_k$$

 $= A \cos \phi \sum_{k=1}^N \cos^2 \phi_k$

$$\therefore \frac{\sum_{k=1}^N I_k \sin \phi_k}{\sum_{k=1}^N I_k \cos \phi_k} = \frac{-A \sin \phi \sum_{k=1}^N \sin^2 \phi_k}{A \cos \phi \sum_{k=1}^N \cos^2 \phi_k} = -\tan \phi$$

$$\therefore \phi = -\arctan \frac{\sum_{k=1}^N I_k \sin \phi_k}{\sum_{k=1}^N I_k \cos \phi_k}, \text{ 这是相移法的一般公式.}$$

2. 空间傅里叶变换

一个光强为 I_0 的平面载波的条纹图可以表示为

$$f(x, y) = a(x, y) + b(x, y) \cos [2\pi (\omega_{x0} x + \omega_{y0} y)]$$

其中 ω_{x0}, ω_{y0} 分别是载波在 x, y 方向上的频率分量。

试件发生变形后, 载波的空间频率被调制, 光强变为

$$f(x, y) = a(x, y) + b(x, y) \cos [2\pi (\omega_{x0} x + \omega_{y0} y) + \phi(x, y)]$$

$$= a(x, y) + C_+(x, y) + C_-(x, y)$$

$$\text{其中 } C_+(x, y) = \frac{1}{2} b(x, y) e^{j\phi(x, y)} e^{j2\pi (\omega_{x0} x + \omega_{y0} y)}$$

$$C_-(x, y) = \frac{1}{2} b(x, y) e^{-j\phi(x, y)} e^{-j2\pi (\omega_{x0} x + \omega_{y0} y)}$$

对图像做傅里叶变换得

~~得到~~

$$G(\omega_x, \omega_y) = A(\omega_x, \omega_y) + G_+(\omega_x - \omega_{x0}, \omega_y - \omega_{y0}) + G_-(\omega_x + \omega_{x0}, \omega_y + \omega_{y0})$$

其中 A 代表背景光强造成的低频量, 称为零级谱。 G_+ 和 G_- 分别称为正一阶谱和负一阶谱, 它们对称分布在零级谱两侧。

$$\begin{aligned} G_+(\omega_x - \omega_{x0}, \omega_y - \omega_{y0}) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} b(x, y) e^{j\phi(x, y)} e^{j2\pi (\omega_{x0} x + \omega_{y0} y)} e^{-j2\pi (\omega_x x + \omega_y y)} dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} b(x, y) e^{j\phi(x, y)} e^{-j2\pi [(\omega_x - \omega_{x0})x + (\omega_y - \omega_{y0})y]} dx dy \end{aligned}$$

滤波和解调:

在频域中取出正一阶谱 $G_+(\omega_x - \omega_{x0}, \omega_y - \omega_{y0})$ 并移到原点, 得到 $G_+(\omega_x, \omega_y)$ 。

作傅立叶逆变换得到 $\frac{1}{2} b(x, y) e^{j\phi(x, y)}$, 记为 $C_+(x, y)$ 。

于是相位

$$\phi(x, y) = \arctan \frac{\text{Im}[C_+(x, y)]}{\text{Re}[C_+(x, y)]}$$

得到的相位在 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 中, 经过去包裹可得连续相位。

3. 数据相关系数

已有变形前后的散斑图, 先从变形前的散斑图上选取参考区段, 取出光强 $I_1(x_i, y_i)$;

然后在变形后的散斑图上用相同的选取框选取数据, 记为 $I_2(x_i^*, y_i^*)$;

逐点搜索区域, 比较相关系数, 找出最大相关系数点的位置;

待测点的变形位移为两区域的坐标差值。

相关系数的定义不变, 形式为

$$C = \frac{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m [I_1(x_i, y_i) - \bar{I}_1][I_2(x_i^*, y_i^*) - \bar{I}_2]}{\sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m [I_1(x_i, y_i) - \bar{I}_1]^2} \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m [I_2(x_i^*, y_i^*) - \bar{I}_2]^2}}$$

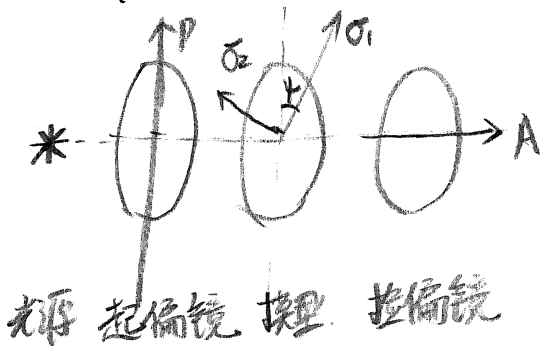
六. 光弹性

1. 平面应力-光学定律

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{f_\sigma}{h} N$$

σ_1, σ_2 为两个主应力; $f_\sigma = \frac{\lambda}{c}$ 为材料条纹值, c 为应力光学常数; h 为材料厚度;
 N 为条纹级数: $N = \frac{\Delta \rho}{2\pi} = \frac{\Delta}{\lambda}$.

2. 平面偏振光下的光弹性效应.



起偏镜 P 与检偏镜 A 正交放置.

经过起偏镜后的偏振光: $u = a \sin \omega t$.

沿 σ_1, σ_2 方向分解:
$$\begin{cases} u_1 = a \sin \omega t \cos \psi \\ u_2 = a \sin \omega t \sin \psi \end{cases}$$

经过模型后附加光程差 Δ .

则经过模型后的光矢量:
$$\begin{cases} u_1' = a \sin(\omega t + \frac{2\pi}{\lambda} \Delta) \cos \psi \\ u_2' = a \sin \omega t \sin \psi \end{cases}$$

经过检偏镜后的光矢量:

$$u_3 = u_1' \sin \psi - u_2' \cos \psi$$

$$= a \sin 2\psi \cos(\omega t + \frac{\pi}{\lambda} \Delta) \sin(\frac{\pi}{\lambda} \Delta)$$

光强 $I_3 = u_3 u_3^* = k (a \sin 2\psi \sin \frac{\pi}{\lambda} \Delta)^2$

暗条纹的位置:

1° 等倾线 $\sin 2\psi = 0$, 即 $\psi = 0$ 或 $\frac{\pi}{2}$.

说明该点主轴方向与偏振轴方向重合.

2° 等差线 $\sin \frac{\pi}{\lambda} \Delta = 0$, 即 $\frac{\pi}{\lambda} \Delta = N\pi$, $N = 0, 1, 2, \dots$.

由应力-光学定律得

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{Nf}{h}$$

