No.

Date

第3章 特殊函数

贝塞尔函数

1、柱坐标下对三个典型方程分离变量，出现贝塞尔方程

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - \nu^2) y = 0 \qquad (\nu \geq 0)$$

√ 2、第一类 ν 阶贝塞尔函数

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{1}{k!\,\Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

第一类 $-\nu$ 阶贝塞尔函数

$$J_{-\nu}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{1}{k!\,\Gamma(k-\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\nu} \qquad \left(\text{对 } n \in N,\ J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)\right)$$

第二类 ν 阶贝塞尔函数（Neumann函数）

$$N_\nu(x) = \frac{J_\nu(x)\cos\nu\pi - J_{-\nu}(x)}{\sin\nu\pi} \qquad (\nu \notin \mathbb{Z})$$

整阶 Neumann 函数

$$N_n(x) = \lim_{\nu\to n} N_\nu(x) = \lim_{\nu\to n} \frac{J_\nu(x)\cos\nu\pi - J_{-\nu}(x)}{\sin\nu\pi} \qquad \left(\lim_{x\to 0} N_n(x) = \infty\right)$$

3、贝塞尔方程的通解为

$$y(x) = C_1 J_\nu(x) + C_2 N_\nu(x)$$

4、母函数

$$\exp\left\{\frac{x}{2}\left(\zeta - \frac{1}{\zeta}\right)\right\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(x)\zeta^n$$

积分表示

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(x\sin\theta - n\theta)\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \exp\{i(x\sin\theta - n\theta)\}\,d\theta$$

5、加法公式：$J_n(x+y) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} J_k(x) J_{n-k}(y)$

√ 微分关系：

$$J_\nu'(x) = J_{\nu-1}(x) - \frac{\nu}{x} J_\nu(x) \qquad \left(\frac{d}{dx}\left(x^\nu J_\nu(x)\right) = x^\nu J_{\nu-1}(x)\right)$$

$$J_\nu'(x) = \frac{\nu}{x} J_\nu(x) - J_{\nu+1}(x) \qquad \left(\frac{d}{dx}\left(\frac{J_\nu(x)}{x^\nu}\right) = -\frac{J_{\nu+1}(x)}{x^\nu}\right)$$

√ 递推公式：

$$J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} J_\nu(x)$$

$$J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x) = 2J_\nu'(x)$$

6、渐近公式：

$$J_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(x^{-\frac{3}{2}}\right)$$

$$N_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(x^{-\frac{3}{2}}\right)$$

7、固有值问题

$$\begin{cases} x^2 y'' + x y' + (\lambda x^2 - \nu^2) y = 0 & (0 < x < a,\ \nu \geq 0) \\ \alpha y(a) + \beta y'(a) = 0 & \\ y(0) \text{ 有界} & \end{cases}$$

$(k(x)=x \quad q(x)=\frac{\nu^2}{x} \quad \rho(x)=x)$

令 $\lambda = \omega^2 \ (\omega \geq 0)$，得 $y(x) = J_\nu(\omega x)$

由 $\alpha J_\nu(\omega a) + \beta\omega J_\nu'(\omega a) = 0$，

记它的正实零点依次为 $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \cdots$

故 固有值 $\lambda_n = \omega_n^2 \quad (n=1,2,3,\cdots)$

固有函数 $y_n(x) = J_\nu(\omega_n x) \quad (n=1,2,3,\cdots)$

S-L定理保证了 λ_n 可数无穷，非负，$y_n(x)$ 正交完备，故 Fourier-Bessel 级数：

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n J_\nu(\omega_n x),$$

其中 $f_n = \frac{1}{N_\nu^2}\int_0^a x f(x) J_\nu(\omega_n x)\,dx$

$$N_\nu^2 = \begin{cases} \frac{a^2}{2} J_{\nu+1}^2(\omega_n a) & \text{(有第一类边界条件：} J_\nu(\omega_n a)=0 \text{ 时)} \\ \frac{1}{2}\left[a^2 - \left(\frac{\nu}{\omega_n}\right)^2\right] J_\nu^2(\omega_n a) & \text{(有第二类边界条件：} J_\nu'(\omega_n a)=0 \text{ 时)} \\ \frac{1}{2}\left[a^2 - \left(\frac{\nu}{\omega_n}\right)^2 + \left(\frac{a}{\omega_n h}\right)^2\right] J_\nu^2(\omega_n a) & \text{(有第三类边界条件：} J_\nu'(\omega_n a) = -\frac{J_\nu(\omega_n a)}{\omega h},\ h=\frac{\beta}{\alpha} \text{ 时)} \end{cases}$$

定理：(Fourier-Bessel 级数收敛定理)

$f(x)$ 在 $(0,a)$ 上逐段光滑，$\int_0^a \sqrt{x}\,|f(x)|\,d(x)$ 有限，

$f(x)$ 满足相应固有值的边界条件，

则上述级数收敛于 $\frac{1}{2}[f(x+) + f(x-)]$

勒让德函数

1、球坐标下求解泊松方程时，分离变量，令 $\cos\theta = x$，$\Theta(\theta) = y(x)$，出现勒让德方程

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \lambda y = \frac{d}{dx}[(1-x^2)y'] + \lambda y = 0$$

定理：记 $\lambda = l(l+1)$，当 l 不是整数时，勒让德方程在 $[-1,1]$ 上没有非零有界解；

当 $l = n = 0,1,2,\cdots$ 时，固有值和固有函数分别为

$$\lambda_n = n(n+1)$$

$$y_n(x) = \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$$

✓ 2、勒让德多项式

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n \cdot n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n = \sum_{k=0}^{M} \frac{(2n-2k)!}{2^n \cdot k!\,(n-k)!\,(n-2k)!} x^{n-2k}$$

其中 $M = [\frac{n}{2}]$，$P_n(1) = 1$.

No.

Date

3、母函数 $\dfrac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} C_n(x)\, t^n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} P_n(x)\, t^n$

其中 $C_n(x) = \dfrac{1}{2\pi i}\int_{C'} \dfrac{(u^2-1)^n}{2^n (u-x)^{n+1}}\, du$，为勒让德多项式的积分表达式.

✓ 4、递推公式.

$$\left.\begin{aligned}
&(n+1)P_{n+1}(x) - x(2n+1)P_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0\\
&nP_n(x) - xP_n'(x) + P_{n-1}'(x) = 0\\
&nP_{n-1}(x) - P_n'(x) + xP_{n-1}'(x) = 0\\
&P_{n+1}'(x) - P_{n-1}'(x) = (2n+1)P_n(x)
\end{aligned}\right|\ (n\geq 1)$$

5、模的平方 $\|P_n(x)\|^2 = \dfrac{2}{2n+1}$

定理：(Fourier - Legendre 级数收敛定理)

$f(x)$ 是 $(-1,1)$ 内实值函数，且在 $(-1,1)$ 上分段光滑，$\int_{-1}^{1} f^2(x)\,dx$ 具有有限值。

则 级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} C_n P_n(x)$，$C_n = \dfrac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1} f(x) P_n(x)\,dx$ 收敛于 $\frac{1}{2}\left(f(x+) + f(x-)\right)$