第三章 应力分析

3.1 应力张量

① 外力 $\begin{cases}\text{体力} \\ \text{面力}\end{cases}$ 体力密度 $\vec{f}(\vec{r})=\dfrac{d\vec{F}}{dV}$

② 内力 分子间内力作用是短程的，所以认为相邻微元仅通过接触面相互作用。

③ 长方体上的应力

按坐标系法方向取一长方体微元，将三个法向为坐标轴正方向的面元上的应力按坐标轴分解。

将9个应力分量排成矩阵，记

$$\vec{T}=\sigma_{\underset{\text{面}}{i}\underset{\text{方向}}{j}}\vec{e}_i\vec{e}_j$$

，在其余三个法方向与坐标轴正方向相反的面上，以$\{-\vec{e}_1,-\vec{e}_2,-\vec{e}_3\}$建系。

④ 斜面上的应力

作四面体力平衡分析，得法方向为$\vec{n}$的面元上的应力

$$\vec{t}=\vec{n}\cdot\vec{T}$$

或 $t_i=n_j\sigma_{ji}$

注：1°由于微元内的体力与面力相比，总可以被忽略掉，所以对于运动中的弹性体，上式也成立，因为惯性力是体力。

2°上式各矢量均在同一(整体)坐标系下分解。

⑤ 应力张量

做坐标变换

$$\vec{e}_i'=c_{ij}\vec{e}_j$$

于是应力分量

$$\sigma_{ij}'=(\vec{e}_i'\cdot\vec{T})\cdot\vec{e}_j'=c_{ik}\vec{e}_k\cdot\vec{T}\cdot\vec{e}_s c_{js}$$
$$=c_{ik}c_{js}\sigma_{ks}$$

所以$\vec{T}$为张量，称为应力张量。

⑤ 多连通域

一般地说，可借 m 个截面成为单连通区域的区域，称为 m+1 连通区域。

多连通域存在满足几何方程的位移场的条件为

1° 截成的单连通域内，应变场满足协调条件.

2° 对于与第 i 个截面相交的域内封闭曲线 L_i，其上的环路积分

$$\oint_{L_i} d\vec{\rho}\cdot\left[\vec{\Gamma}_\rho + (\vec{\Gamma}_\rho\times\nabla_\rho)\times\vec{\rho}\right] = \vec{0}$$

$$\oint_{L_i} d\vec{\rho}\cdot(\vec{\Gamma}_\rho\times\nabla_\rho) = \vec{0}$$

附：另一种推导应变协调方程的方式.

给定一个位移场 $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)$，假设它有足够多阶导数。

则 $u_1=\int u_{1,1}\,dx_1+u_{1,2}\,dx_2+u_{1,3}\,dx_3$

且 $u_{1,1}=\varepsilon_{11}$

$$u_{1,2}=\int u_{1,21}\,dx_1+u_{1,22}\,dx_2+u_{1,23}\,dx_3$$

$$=\int u_{1,12}\,dx_1+(2\varepsilon_{12}-u_{2,1})_{,2}\,dx_2+\frac{1}{2}\left[(2\varepsilon_{12}-u_{2,1})_{,3}+(2\varepsilon_{13}-u_{3,1})_{,2}\right]dx_3$$

$$=\int \varepsilon_{11,2}\,dx_1+(2\varepsilon_{12,2}-u_{2,12})\,dx_2+\frac{1}{2}\left[2\varepsilon_{12,3}-u_{2,31}+2\varepsilon_{13,2}-u_{3,21}\right]dx_3$$

$$=\int \varepsilon_{11,2}\,dx_1+(2\varepsilon_{12,2}-\varepsilon_{22,1})\,dx_2+(\varepsilon_{12,3}+\varepsilon_{13,2}-\varepsilon_{23,1})\,dx_3$$

$$u_{1,3}=\int \varepsilon_{11,3}\,dx_1+(\varepsilon_{13,2}+\varepsilon_{12,3}-\varepsilon_{32,1})\,dx_2+(2\varepsilon_{13,3}-\varepsilon_{33,1})\,dx_3$$

由积分单值条件，得

$$(\varepsilon_{11,2})_3=(\varepsilon_{12,3}+\varepsilon_{13,2}-\varepsilon_{23,1})_1$$

$$(\varepsilon_{11,2})_2=(2\varepsilon_{12,2}-\varepsilon_{22,1})_1$$

$$(2\varepsilon_{12,2}-\varepsilon_{22,1})_3=(\varepsilon_{12,3}+\varepsilon_{13,2}-\varepsilon_{23,1})_2$$

类似可得一共18个方程，只有6个不同的，即应变协调方程.

3.2 平衡方程

① 用小盒子法可推导出力和力矩的平衡方程：

(整体形式) $\nabla\cdot\vec{T}+\vec{f}=0$; $\vec{T}=\vec{T}^T$

其中 $\vec{f}$ 为体力密度、

(指标形式) $\sigma_{ji,j}+f_i=0$; $\sigma_{ij}=\sigma_{ji}$

② 积分方法推导平衡方程

力平衡：
$$\oiint_{\partial D}\vec{t}\,ds+\iiint_{D}\vec{f}\,d\tau$$
$$=\oiint_{\partial D}\vec{n}\cdot\vec{T}\,ds+\iiint_{D}\vec{f}\,d\tau$$
$$=\iiint_{D}(\nabla\cdot\vec{T}\,d\tau+\vec{f}\,d\tau)=0$$
$$\Rightarrow\quad\nabla\cdot\vec{T}+\vec{f}=0$$

力矩平衡：
$$\oiint_{\partial D}\vec{r}\times\vec{t}\,ds+\iiint_{D}\vec{r}\times\vec{f}\,d\tau$$
$$=\oiint_{\partial D}\vec{r}\times(\vec{n}\cdot\vec{T})\,ds+\sim$$
$$=-\oiint_{\partial D}(\vec{n}\cdot\vec{T})\times\vec{r}\,ds+\sim$$
$$=-\iiint_{D}\nabla\cdot(\vec{T}\times\vec{r})\,d\tau+\sim$$
$$=-\iiint_{D}\left[(\nabla\cdot\vec{T})\times\vec{r}+\vec{T}\overset{\times}{\cdot}(\vec{r}\nabla)\right]d\tau+\sim$$
$$=\iiint_{D}\left[\vec{r}\times(\nabla\cdot\vec{T}+\vec{f})+\vec{T}\overset{\times}{\cdot}\vec{I}\right]d\tau$$
$$=\iiint_{D}\vec{T}\overset{\times}{\cdot}\vec{I}\,d\tau=0$$
$$\Rightarrow\quad\vec{T}\overset{\times}{\cdot}\vec{I}=0$$
$$\Rightarrow\quad\vec{T}=\vec{T}^T$$

注：1° 平衡方程中有6个标量，3个方程。一般来说，平衡方程不能确定应力场.

2° 以后指平衡方程，默认为力平衡方程。并总假定应力张量对称.

3° 弹性动力学的平衡方程为
$$\begin{cases}\nabla\cdot\vec{T}+\vec{f}=\rho\ddot{\vec{u}}\\ \vec{T}=\vec{T}^T\end{cases}$$

3.3 主应力,偏应力

① 主应力

不同坐标系下,应力张量的矩阵间满足

$$T' = C T C^T$$

由于实对称矩阵正交相似于实对角阵,

所以存在坐标系使

$$T = \mathrm{diag}\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$$

相应的有定义 主坐标系、主方向、主应力。 (注:对于一般的各向异性弹性体,应力主轴与应变主轴不重合。)

a、主方向相互垂直

b、主方向间剪应力为0.

c、应力张量有三个不变量

$$\begin{cases} J_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \\ J_2 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1 \\ J_3 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3 \end{cases}$$

② 最大剪应力

剪应力 $\tau^2 = t^2 - \sigma^2 = (n_1^2\sigma_1^2 + n_2^2\sigma_2^2 + n_3^2\sigma_3^2) - (n_1^2\sigma_1 + n_2^2\sigma_2 + n_3^2\sigma_3)^2$

求条件极值 $F(n_1, n_2, n_3) = \tau^2 - \lambda(n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 - 1)$

得
$$\begin{cases} n_1(\sigma_1^2 - 2\sigma_1\sigma + \lambda) = 0 \\ n_2(\sigma_2^2 - 2\sigma_2\sigma + \lambda) = 0 \\ n_3(\sigma_3^2 - 2\sigma_3\sigma + \lambda) = 0 \end{cases}$$

讨论: a) n_1, n_2, n_3 有两个0.

比如 $n_2 = n_3 = 0$,则 $n_1 = \pm 1$,

方程组有解,此时 $\tau^2 = 0$

b) n_1, n_2, n_3 有1个0.

比如 $n_3 = 0$,则 $\sigma = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2)$,$n_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

方程组有解. 此时 $\tau = \pm\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)$

$|\tau|_{max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)$.

c) n_1, n_2, n_3 均不为0.

ⓐ $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$

方程组有解,此时 $\tau = 0$.

ⓑ $\sigma_1 \neq \sigma_2 \neq \sigma_3$

不可能

ⓒ $\sigma_1 = \sigma_2 \neq \sigma_3$

则 $\sigma = \frac{1}{2}(\sigma_1+\sigma_3)$， $n_3=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ ，$n_1^2+n_2^2=\frac{1}{2}$.

方程组有解，此时 $\tau = \pm\frac{1}{2}(\sigma_1-\sigma_3)$.

③八面体剪应力

依主坐标轴建立正八面体，其法方向为 $(\pm\frac{\sqrt{3}}{3},\pm\frac{\sqrt{3}}{3},\pm\frac{\sqrt{3}}{3})$

八面体各面上正应力

$$\sigma_0 = \frac{1}{3}(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)$$

八面体各面上剪应力

$$\tau_0^2 = \frac{1}{3}(\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2)-(\frac{\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3}{3})^2$$
$$= \frac{1}{9}[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2]$$

④偏应力张量

定义偏应力张量

$$\begin{cases} s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_0\delta_{ij} \\ \vec{T}' = \vec{T} - \sigma_0\vec{I} \end{cases}$$ ，σ_0为八面体正应力 $\sigma_0=\frac{1}{3}(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)$.

偏应力张量的不变量

$$\begin{cases} I_1 = 0 \\ I_2 = (\sigma_1-\sigma_0)(\sigma_2-\sigma_0)+(\sigma_2-\sigma_0)(\sigma_3-\sigma_0)+(\sigma_3-\sigma_0)(\sigma_1-\sigma_0) \\ I_3 = (\sigma_1-\sigma_0)(\sigma_2-\sigma_0)(\sigma_3-\sigma_0) \end{cases}$$

且 $I_2 = -\frac{3}{2}\tau_0^2$

球面上剪应力τ^2的平均值

$$\frac{\oint\tau^2 ds}{\oint ds} = \frac{3}{5}\tau_0^2$$

3-4 应力函数

方程 $\nabla\cdot\vec{T}=\vec{0}$ 有解：

① Airy应力函数 U

$\sigma_x = U_{,yy}$ $\sigma_y = U_{,xx}$ $\tau_{xy} = -U_{,xy}$

$\sigma_z = 0$ $\tau_{zx}=0$ $\tau_{yz} = 0$

② Maxwell 应力函数 X_1, X_2, X_3

$$\sigma_x = X_{3,yy} + X_{2,zz} \qquad \sigma_y = X_{1,zz} + X_{3,xx} \qquad \sigma_z = X_{2,xx} + X_{1,yy}$$

$$\tau_{yz} = -X_{1,xz} \qquad \tau_{zx} = -X_{2,zx} \qquad \tau_{xy} = -X_{3,xy}$$

③ Morera 应力函数 R_1, R_2, R_3

$$\sigma_x = -2R_{1,yz} \qquad \sigma_y = -2R_{2,zx} \qquad \sigma_z = -2R_{3,xy}$$

$$\tau_{yz} = -R_{1,xx} + R_{2,yx} + R_{3,zx}$$

$$\tau_{zx} = -R_{2,yy} + R_{3,zy} + R_{1,xy}$$

$$\tau_{xy} = -R_{3,zz} + R_{1,xz} + R_{2,yz}$$

④ Beltrami 应力函数 ϕ_{ij}.

$$\vec{T} = \nabla \times \vec{\Phi} \times \nabla \quad , \quad \vec{\Phi} = \phi_{ij} \vec{e_i} \vec{e_j}$$

且 $\Phi = -\begin{pmatrix} X_1 & R_3 & R_2 \\ R_3 & X_2 & R_1 \\ R_2 & R_1 & X_3 \end{pmatrix}$

⑤ Beltrami - Schaefer 解.

$$\vec{T} = \nabla \times \vec{\Phi} \times \nabla + \vec{h}\nabla + \nabla\vec{h} - \vec{I}(\nabla \cdot \vec{h})$$

且 $\nabla^2 \vec{h} = \vec{0}$，即 $\vec{h}$ 为调和矢量.

注：Beltrami - Schaefer 解是完备的；

Beltrami 解对自平衡场是完备的。