

第三章 应变分析、应力分析和屈服条件

3.1 应变张量和应力张量

变形率张量 $\frac{1}{2}(v_{ij} + v_{ji})$ (小变形下: $\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(v_{ij} + v_{ji})$)

速度 $v_i = u_i$

(小变形下: $v_i = \frac{\partial u_i}{\partial t}$)

应力张量的运动方程 $\sigma_{ij,j} + F_i = \rho v_i$

应力张量的对称性条件 $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$

3.2 应变张量/应力张量的不变量

$$I_1 = \tau_{kk}$$

$$I_2 = -\frac{1}{2}(\tau_{ii}\tau_{kk} - \tau_{ik}\tau_{ki})$$

$$= -[(\tau_{11}\tau_{22} - \tau_{12}\tau_{21}) + (\tau_{11}\tau_{33} - \tau_{13}\tau_{31}) + (\tau_{22}\tau_{33} - \tau_{23}\tau_{32})]$$

$$I_3 = \det(\tau_{ij})$$

用主值表示的不变量:

$$I_1 = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3$$

$$I_2 = -(\tau_1\tau_2 + \tau_2\tau_3 + \tau_3\tau_1)$$

$$I_3 = \tau_1\tau_2\tau_3$$

其中, τ 可以代指 σ 和 ϵ .

注意, I_2 的定义与弹力不同, 符号相反.

3.3 偏应变张量和偏应力张量

球量 $\tau_m = \frac{1}{3}\tau_{kk} = \frac{1}{3}I_1$ (或称为平均正应变/平均正应力)

偏量 $\zeta_{ij} = \tau_{ij} - \tau_m \delta_{ij}$

偏应变张量 ϵ_{ij} ; 偏应力张量 S_{ij}

性质: 1° 张量 τ_{ij} 及其偏量 ζ_{ij} 有相同的主方向

2° 偏量的不变量

$$J_1 = 0$$

$$J_2 = \frac{1}{2}\zeta_{ij}\zeta_{ij} = I_2 + 3\tau_m^2$$

$$J_3 = \det(\zeta_{ij}) = \frac{1}{3}\zeta_{ij}\zeta_{jk}\zeta_{ki} = I_3 + I_2\tau_m + 2\tau_m^3$$



$$3^{\circ} J_2 = \frac{1}{6} [(\tau_{11} - \tau_{22})^2 + (\tau_{22} - \tau_{33})^2 + (\tau_{33} - \tau_{11})^2 + 6(\tau_{12}^2 + \tau_{23}^2 + \tau_{31}^2)]$$

用主值表示时,

$$J_2 = \frac{1}{3} (\tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2 - \tau_1 \tau_2 - \tau_2 \tau_3 - \tau_3 \tau_1)$$

4° 若张量的主值满足 $\tau_1 \geq \tau_2 \geq \tau_3$, 则有基本不等式

$$1 \leq \frac{2\sqrt{J_2}}{\tau_1 - \tau_3} \leq \frac{2}{\sqrt{3}}$$

证明: $\frac{1}{2}(\tau_1 - \tau_3)^2 \leq (\tau_1 - \tau_2)^2 + (\tau_2 - \tau_3)^2 \leq (\tau_1 - \tau_3)^2$

$$\therefore \frac{1}{4}(\tau_1 - \tau_3)^2 \leq J_2 \leq \frac{1}{3}(\tau_1 - \tau_3)^2 \quad \square$$

等效应变 (应变强度):

$$\bar{\epsilon} = \sqrt{\frac{2}{3} e_{ij} e_{ij}}$$

等效应力 (应力强度):

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{2}{3} S_{ij} S_{ij}}$$

等效剪应变 (剪应变强度):

$$\bar{\gamma} = \sqrt{2 e_{ij} e_{ij}}$$

等效剪应力 (剪应力强度):

$$\bar{\tau} = \sqrt{\frac{1}{2} S_{ij} S_{ij}}$$

八面体剪应变 $\gamma_8 = \sqrt{\frac{4}{3} e_{ij} e_{ij}}$ (注: 这是工程剪应变)

八面体剪应力 $\tau_8 = \sqrt{\frac{1}{3} S_{ij} S_{ij}}$

注: 1° 简单拉伸时, 若材料不可压, 即 $\nu = \frac{1}{2}$

$$\epsilon_{11} = \epsilon, \quad \epsilon_{22} = \epsilon_{33} = -\frac{1}{2}\epsilon, \quad \epsilon_{ij} = 0 \quad (i \neq j)$$

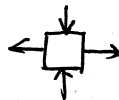


$$\text{有 } \bar{\epsilon} = \epsilon$$

$$\sigma_{11} = \sigma, \quad \sigma_{22} = \sigma_{33} = 0, \quad \sigma_{ij} = 0 \quad (i \neq j)$$

$$\text{有 } \bar{\sigma} = \sigma$$

2° 纯剪切时



$$\epsilon_{11} = \frac{1}{2}\gamma, \quad \epsilon_{33} = -\frac{1}{2}\gamma, \quad \text{其它应变分量为 } 0.$$

$$\text{有 } \bar{\gamma} = \gamma$$

$$\sigma_{11} = \tau, \quad \sigma_{33} = -\tau, \quad \text{其它应力分量为 } 0.$$

$$\text{有 } \bar{\tau} = \tau$$

3° 以主方向建系, 由法向为 $(\pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \pm \frac{1}{\sqrt{3}})$ 的面构成的八面体上的剪应力为 $\tau_8 = \sqrt{\tau_i \tau_i - N^2}$

其中面力 $T_i = (\sigma_{11}v_1, \sigma_{22}v_2, \sigma_{33}v_3)$, (v_1, v_2, v_3) 表示面法向。

$$\text{正应力 } N = \sigma_{11} v_1^2 + \sigma_{22} v_2^2 + \sigma_{33} v_3^2$$

$$= \frac{1}{3} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})$$

$$\therefore t_8 = \sqrt{\frac{1}{3} (\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2) - \frac{1}{9} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})^2}$$

$$= \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2}$$

$$\therefore J_2 = \frac{1}{2} S_{ij} S_{ij} = \frac{1}{6} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]$$

$$\therefore t_8 = \sqrt{\frac{1}{3} S_{ij} S_{ij}}, \text{ 即为八面体剪应力.}$$

对八面体剪应力的讨论很相似, 只是要乘以 2.

3-4 屈服条件 (应力空间中的)

屈服条件: 物体微元弹性状态的极限。(未经任何塑性变形时)

屈服曲面: 屈服条件 $f(\sigma_{ij}) = 0$ 在应力空间中代表的曲面。

当 $f(\sigma_{ij}) < 0$ 时, 应力状态在屈服曲面内, 材料处于弹性状态。

假设: 1° 材料初始各向同性。

2° 静水压力不影响材料的塑性性质。

在假设 1° 下, 屈服条件可表示为主应力的函数 $f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0$,

或者说只与不变量有关, $f_0(I_1, I_2, I_3) = 0$ 。

在假设 2° 下, 屈服条件与 I_1 无关, 只与应力偏量相关, $f_0(I_2, I_3) = 0$ 。

Frame 1: 在主应力空间 $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ 中, 微元的任一应力状态都可表示为

$$\vec{OP} = \sigma_1 \vec{e}_1 + \sigma_2 \vec{e}_2 + \sigma_3 \vec{e}_3$$

将应力状态分解为偏量部分和球量部分(静水压力部分)。

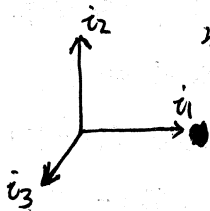
$$\vec{OP} = (S_1 \vec{e}_1 + S_2 \vec{e}_2 + S_3 \vec{e}_3) + (\sigma_m \vec{e}_1 + \sigma_m \vec{e}_2 + \sigma_m \vec{e}_3)$$

$$= \vec{OQ} + \vec{ON}$$

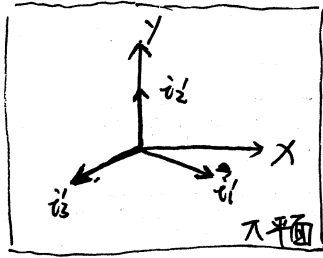
其中 \vec{OQ} 为主偏应力张量, $S_\alpha = \sigma_\alpha - \sigma_m$ ($\alpha = 1, 2, 3$)

定义 π 平面: 过原点 O 以 \vec{ON} 为法向的平面 $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$ 。

可知, \vec{OQ} 总是在 π 平面内。



Frame 2: $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ 在 π 平面上的投影为 $(\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3)$



以 \vec{e}'_2 为 y 轴, 建立 π 平面上的直角坐标系 Oxy .

基向量 \vec{e}'_1 与 π 平面间夹角 β 满足 $\cos\beta = \sqrt{\frac{2}{3}}$.

向量 \vec{e}'_i 在 Oxy 系中的坐标为:

$$\vec{e}'_1 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos\beta, -\frac{1}{2} \cos\beta \right)$$

$$\vec{e}'_2 = (0, \cos\beta)$$

$$\vec{e}'_3 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \cos\beta, -\frac{1}{2} \cos\beta \right)$$

Frame 3: 也可以在 π 平面上建立极坐标系, 以 x 轴为 $\theta=0$ 对应的坐标线。坐标表示为 $(r_\sigma, \theta_\sigma)$

坐标变换关系:

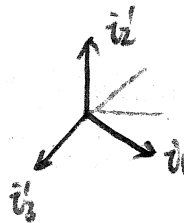
Frame 1 \rightarrow Frame 2:

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2} (s_1 - s_3) = \frac{\sqrt{2}}{2} (\sigma_1 - \sigma_3) \\ y = \frac{1}{\sqrt{6}} (2s_2 - s_1 - s_3) = \frac{1}{\sqrt{6}} (2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3) \end{cases}$$

Frame 1 \rightarrow Frame 3:

$$\begin{cases} r_\sigma = \sqrt{\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)^2 + \frac{1}{6}(2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3)^2} = \sqrt{2J_2} \\ \tan\theta_\sigma = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3} = \frac{1}{\sqrt{3}} \mu_\sigma \end{cases}$$

其中, 罗地参数 $\mu_\sigma \equiv \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3}$



- 纯压缩
- 纯剪切
- 纯拉伸

在 $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ 时, $-1 \leq \mu_\sigma \leq 1$, $-30^\circ \leq \theta_\sigma \leq 30^\circ$.

$\mu_\sigma = -1$ 为纯拉伸 ($\sigma_1 = \sigma, \sigma_2 = \sigma_3 = 0$);

$\mu_\sigma = 0$ 为纯剪切 ($\sigma_1 = \sigma, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = -\sigma$);

$\mu_\sigma = 1$ 为纯压缩 ($\sigma_1 = \sigma_2 = 0, \sigma_3 = -\sigma$).

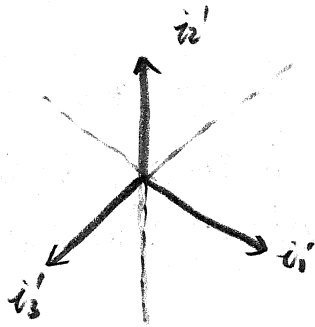
Frame 2, Frame 3 \rightarrow Frame 1:

$$\begin{cases} s_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} x - \frac{1}{\sqrt{6}} y = \sqrt{\frac{2}{3}} r_\sigma \sin(\theta_\sigma + \frac{2\pi}{3}) \\ s_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} y = \sqrt{\frac{2}{3}} r_\sigma \sin\theta_\sigma \\ s_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}} x - \frac{1}{\sqrt{6}} y = \sqrt{\frac{2}{3}} r_\sigma \sin(\theta_\sigma - \frac{2\pi}{3}) \end{cases}$$

屈服曲线：屈服曲面与 π 平面的交线。

在假设2°下，屈服条件表现为 $f_0(J_2, J_3) = 0$ 。沿着 ON 方向，应力状态的偏量不变，所以方程 $f_0(J_2, J_3) = 0$ 表示的曲面应平行于 ON ，也就是垂直于 π 平面。

屈服曲线的性质：~~由假设1°~~假设1°，对屈服曲线上一点 (S_1, S_2, S_3) ，



点 (S_1, S_3, S_2) , (S_3, S_2, S_1) , (S_2, S_1, S_3) 也应该在屈服曲线上。这说明屈服曲线关于 i_1, i_2, i_3 对称。只需确定 60° 范围内的屈服曲线，则可得到完整的屈服曲线。

如果假设拉伸和压缩的屈服极限相等，则点 $(-S_1, -S_2, -S_3)$ 也在屈服曲线上。将 i_1, i_2, i_3 三个坐标轴反号，得到点 $(-S_1, -S_2, -S_3)$ ；再将坐标轴旋转 180° ，得到原坐标轴下的 $(-S_1, -S_2, -S_3)$ 。这说明原先 60° 内的屈服曲线关于其角平分线对称。现在只需确定 30° 的屈服曲线即可。

3.5 常用屈服条件

① Tresca 屈服条件

屈服条件：最大剪应力达到 k_1 。

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = k_1 \quad (\text{假设 } \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3)$$

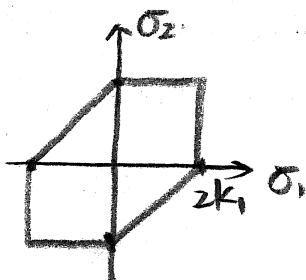
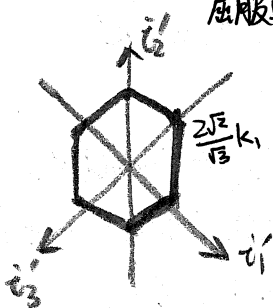
屈服曲线：在 $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ 时， $\theta_0 \in [-30^\circ, 30^\circ]$ ，

此时屈服曲线满足 $\begin{cases} x = \sqrt{2}k_1 \\ y \in [-\frac{\sqrt{3}}{3}k_1, \frac{\sqrt{3}}{3}k_1] \end{cases}$

$$y \in [-\frac{\sqrt{3}}{3}k_1, \frac{\sqrt{3}}{3}k_1]$$

由屈服曲线的性质知，屈服曲线为一个正六边形。

边界为 $\sigma_i - \sigma_j = 2k_1 \quad (i \neq j)$



在平面应力状态下(比如 $\sigma_3 = 0$)，屈服条件在 $\sigma_1 - \sigma_2$ 应力平面上表现为一个六边形，是屈服曲面与 $\sigma_3 = 0$ 的交线。边界为：

$$\begin{cases} \sigma_1 - \sigma_2 = \pm 2k_1 \\ \sigma_1 = \pm 2k_1 \\ \sigma_2 = \pm 2k_1 \end{cases}$$

屈服曲面：以 ON 为中心轴线的正六棱柱面。

极限值 k_1 的确定：

1° 简单拉伸实验

$$\sigma_1 = \sigma_s, \sigma_2 = \sigma_3 = 0 \quad (\sigma_s: \text{拉伸屈服应力})$$

$$\text{得 } \tau_{\max} = \frac{\sigma_s}{2} = k_1, \text{ 即 } k_1 = \frac{\sigma_s}{2}$$

2° 纯剪切实验

$$\sigma_1 = \tau_s, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = -\tau_s \quad (\tau_s: \text{剪切屈服应力})$$

$$\text{得 } \tau_{\max} = \tau_s = k_1, \text{ 即 } k_1 = \tau_s$$

由于 k_1 是不变的，由 1°、2° 知，在 Tresca 屈服条件假设下，

$$\sigma_s = 2\tau_s$$

偏量不变量表示的屈服条件：(推导见书 P91)

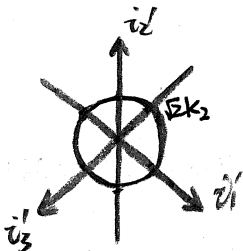
$$f_0(J_2, J_3) = \frac{2\sqrt{J_2}}{\sigma_s} \cos\left\{\frac{1}{3}\sin^{-1}\left[\frac{-3\sqrt{J_3}}{2(J_2)^{3/2}}\right]\right\} - 1 = 0$$

② Mises 屈服条件

$$\text{屈服条件: } f_0(J_2, J_3) = J_2 - k_2^2 = 0$$

$$\text{或 } r_\sigma = \sqrt{2}k_2$$

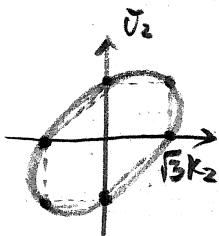
屈服曲线：半径为 $\sqrt{2}k_2$ 的圆。



在平面应力状态下。(比如 $\sigma_3 = 0$)，屈服条件在 σ_1 - σ_2 应力平面上表现为一个椭圆，是屈服曲面与平面 $\sigma_3 = 0$ 的交线。

$$\text{方程为: } \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2 = 3k_2^2$$

屈服曲面：以 ON 为中轴线的圆柱面。



屈服条件的物理解释：1° 八面体剪应力达到极限值。

2° 单位体积剪应变能达到极限值。

$$\text{将应力、应变记为 } \sigma_{ij} = S_{ij} + \sigma_m \delta_{ij}$$

$$\epsilon_{ij} = e_{ij} + \epsilon_m \delta_{ij}$$

$$\text{则应变比能为 } \frac{1}{2}\sigma_{ij}\epsilon_{ij} = \frac{3}{2}\sigma_m\epsilon_m + \frac{1}{2}S_{ij}e_{ij}$$

↑ 体积应变比能 ↑ 剪切应变比能

线弹性材料满足 $e_{ij} = \frac{1}{2\mu}S_{ij}$ ，所以

剪切应变比能为 $\frac{1}{2\mu}J_2$ ，由 J_2 决定

极限值 k_2 的确定:

1° 简单拉伸实验

$$J_2 = \frac{\sigma_s^2}{3} = k_2^2, \text{ 则 } k_2 = \frac{\sigma_s}{\sqrt{3}}$$

2° 纯剪切实验

$$J_2 = \tau_s^2 = k_2^2, \text{ 则 } k_2 = \tau_s$$

由于 k_2 是不变的, 由 1, 2 知, 在 Mises 屈服条件下,

$$\sigma_s = \sqrt{3}\tau_s$$

Tresca 屈服条件与 Mises 屈服条件的比较:



1° 若两屈服面在简单拉伸时重合, 则 $k_2 = \frac{2}{\sqrt{3}}k_1$,

在纯剪切实验时, 两模型相差最大。



2° 若两屈服面在纯剪切实验时重合, 则 $k_2 = k_1$,

在简单拉伸时, 两模型相差最大。

最大相对误差均为 $\frac{2}{\sqrt{3}} - 1 \approx 15\%$

③ 最大偏应力屈服条件

屈服条件: 最大偏应力的绝对值达到 k_3 .

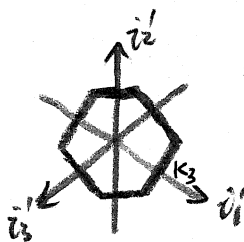
假设材料拉伸压缩的屈服极限相同时, 可记为

$$\max\{|s_1|, |s_2|, |s_3|\} = k_3.$$

屈服曲线: 边界方程为 $s_i = \pm k_3, (i=1, 2, 3)$

$$\text{或 } 2\sigma_i - (\sigma_j + \sigma_k) = \pm 3k_3 \quad (i \neq j \neq k)$$

屈服曲线是一个正六边形。(s_j 为常值在 π 平面上反映为垂直于 s_j 的直线。)



注: 在简单拉伸时, 若 Tresca 屈服曲线与最大偏应力屈服曲线重合,

则在屈服面外凸的假设下, 这两个屈服条件确定了屈服面的下确界和上确界。

屈服条件的双剪应力解释:

两个主剪应力的绝对值之和达到极限值。(拉伸屈服应力 σ_s)

$$\left(\begin{array}{l} \text{假设 } \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3, \text{ 则 } |\tau_{13}| + |\tau_{12}| = \sigma_1 - \frac{1}{2}(\sigma_2 + \sigma_3) = \sigma_s \\ \text{或 } |\tau_{13}| + |\tau_{23}| = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) - \sigma_3 = \sigma_s \end{array} \right)$$

与最大偏应力屈服条件等价。

极限值 k_3 的确定:

简单拉伸实验下, $\max\{|\sigma_1|, |\sigma_2|, |\sigma_3|\} = \frac{2}{3}\sigma_s = k_3$,
 即 $k_3 = \frac{2}{3}\sigma_s$.

应力偏量不变量表示的屈服条件:

$$f_0(J_2, J_3) = \frac{\sqrt{3}J_2}{\sigma_s} \max\left\{ \left| \sin\left(\theta_0 - \frac{2\pi}{3}\right) \right|, \left| \sin\left(\theta_0 + \frac{2\pi}{3}\right) \right| \right\} - 1 = 0$$

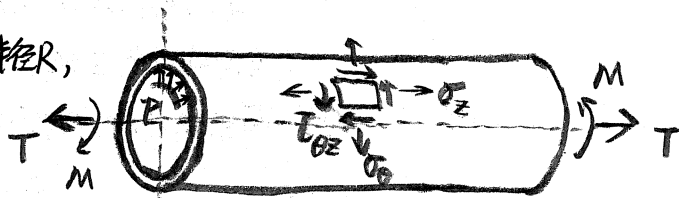
其中 $\theta_0 = \frac{1}{3} \sin^{-1} \left[\frac{-3\sqrt{3}J_3}{2(J_2)^{3/2}} \right]$ ($\theta_0 \in [-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}]$)

注: 最大偏应力屈服条件的优点:

- 1° 某些情况下与实验结果符合较好
- 2° 主应力空间中屈服面是平面, 计算较方便。

3-6 屈服条件的实验验证

薄圆管平均半径 R ,
 壁厚 h ,
 $h \ll R$.



受拉力 T 、内压 p 或扭矩 M 的作用。

① 薄圆管受拉力和内压联合作用

柱坐标下圆管的应力状态可以写为

$$\sigma_\theta = \frac{pR}{h}, \quad \sigma_z = \frac{T}{2\pi R h}, \quad \sigma_r \approx 0$$

设 $\sigma_\theta \geq \sigma_z \geq \sigma_r$, 则取 $\sigma_1 = \sigma_\theta, \sigma_2 = \sigma_z, \sigma_3 = 0$

$$\text{罗地参数 } \mu_\sigma = \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3} = \frac{T - \pi R^2 p}{\pi R^2 p}$$

T, p 比值与对应 μ_σ

T	μ_σ	θ_σ	应力状态
0	-1	-30°	简单拉伸
$\pi R^2 p$	0	0	纯剪切 (除去静水应力后)
$2\pi R^2 p$	1	30°	纯压缩

不同屈服条件对应的 $\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_s} - \mu_\sigma$ 图: (设 $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$)

Tresca 屈服条件: $\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_s} = 1$

Mises 屈服条件: $\sigma_s = \sqrt{3} k_2 = \sqrt{\frac{3}{2}} \sigma_0$
 $= \sqrt{\frac{3}{2}} \sqrt{x^2 + y^2}$
 $= \frac{\sqrt{3}}{2} (\sigma_1 - \sigma_3) \sqrt{1 + \frac{1}{3} \mu_\sigma^2}$

$\therefore \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_s} = \frac{2}{\sqrt{3 + \mu_\sigma^2}}$

最大偏应力屈服条件: $\because S_1 \geq S_2 \geq S_3$

$\therefore \mu_\sigma = \frac{2S_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3} = \frac{3S_2}{S_1 - S_3} = \frac{3(S_1 + S_3)}{S_3 - S_1}$

$(-1 \leq \mu_\sigma \leq 1)$

$\therefore \frac{S_1}{S_3} = \frac{\mu_\sigma - 3}{\mu_\sigma + 3}$

当 $-1 \leq \mu_\sigma \leq 0$ 时, 屈服条件表现为

$S_1 = \frac{2}{3} \sigma_s$

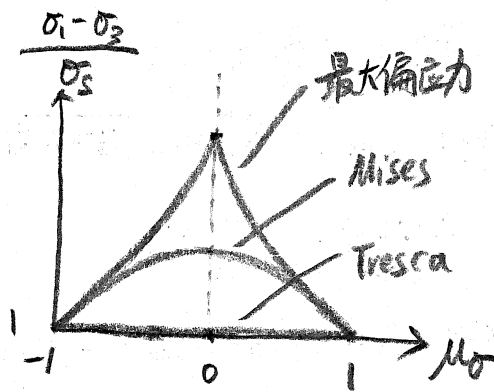
$\therefore \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_s} = \frac{S_1 - S_3}{\sigma_s} = \frac{4}{3 - \mu_\sigma}$

当 $0 \leq \mu_\sigma \leq 1$ 时, 屈服条件表现为

$S_3 = -\frac{2}{3} \sigma_s$

$\therefore \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_s} = \frac{S_1 - S_3}{\sigma_s} = \frac{4}{3 + \mu_\sigma}$

综合, 得 $\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_s} = \frac{4}{3 + |\mu_\sigma|} \quad (-1 \leq \mu_\sigma \leq 1)$



注: 1° 实验结果在 $\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_s} - \mu_\sigma$ 图上更接近 Mises 屈服条件。
 2° 规定拉伸时 ($\mu_\sigma = \pm 1$), 各屈服条件重合。

② 薄圆管受拉力和扭矩联合作用

应力状态可以写为:

$\sigma_z = \frac{T}{2\pi R h}, \quad \tau_{\theta z} = \frac{M}{2\pi R^2 h}, \quad \sigma_r = 0$

主应力 $\sigma_1 = \frac{1}{2} \sigma_z + \sqrt{\frac{1}{4} \sigma_z^2 + \tau_{\theta z}^2} \geq 0$

$\sigma_2 = 0$

$\sigma_3 = \frac{1}{2} \sigma_z - \sqrt{\frac{1}{4} \sigma_z^2 + \tau_{\theta z}^2} \leq 0$

$$\text{主偏应力 } S_1 = \frac{1}{6} [\sigma_z + 3\sqrt{\sigma_z^2 + 4\tau_{\theta z}^2}]$$

$$S_2 = -\frac{1}{3}\sigma_z$$

$$S_3 = \frac{1}{6} [\sigma_z - 3\sqrt{\sigma_z^2 + 4\tau_{\theta z}^2}]$$

$$\text{罗德参数 } \mu_0 = \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3} = \frac{-T}{\sqrt{T^2 + \frac{4M^2}{R^2}}}$$

T, M 取值与对应 μ_0

T	M	μ_0	应力状态
> 0	0	-1	简单拉伸
0	≠ 0	0	纯剪切

不同屈服条件的 $\frac{\tau_{\theta z}}{\sigma_s} - \frac{\sigma_z}{\sigma_s}$ 图:

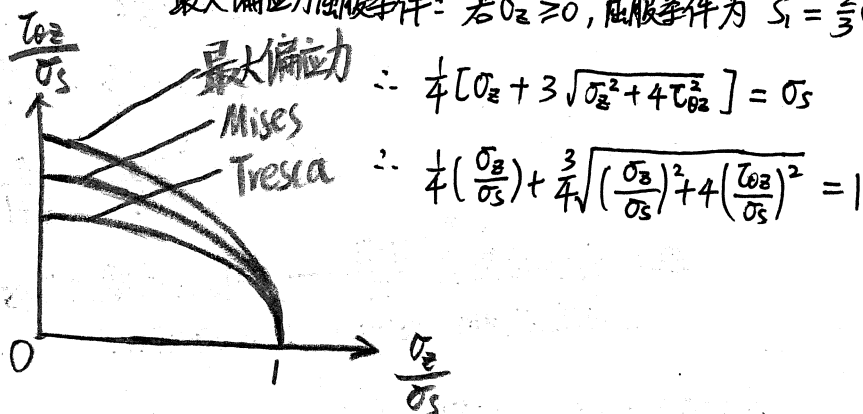
$$\text{Tresca 屈服条件: } \tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\sigma_z^2 + 4\tau_{\theta z}^2} = \frac{\sigma_s}{2}$$

$$\therefore \left(\frac{\sigma_z}{\sigma_s}\right)^2 + 4\left(\frac{\tau_{\theta z}}{\sigma_s}\right)^2 = 1$$

$$\text{Mises 屈服条件: } J_2 = \frac{1}{3}(\sigma_z^2 + 3\tau_{\theta z}^2) = \frac{1}{3}\sigma_s^2$$

$$\therefore \left(\frac{\sigma_z}{\sigma_s}\right)^2 + 3\left(\frac{\tau_{\theta z}}{\sigma_s}\right)^2 = 1$$

最大偏应力屈服条件: 若 $\sigma_z \geq 0$, 屈服条件为 $S_1 = \frac{2}{3}\sigma_s$



$$\therefore \frac{1}{6} [\sigma_z + 3\sqrt{\sigma_z^2 + 4\tau_{\theta z}^2}] = \frac{2}{3}\sigma_s$$

$$\therefore \frac{1}{4}\left(\frac{\sigma_z}{\sigma_s}\right) + \frac{3}{4}\sqrt{\left(\frac{\sigma_z}{\sigma_s}\right)^2 + 4\left(\frac{\tau_{\theta z}}{\sigma_s}\right)^2} = 1$$

注: 实验结果更接近于 Mises 屈服条件和最大偏应力屈服条件。

2. 规定简单拉伸时 ($\mu_0 = \pm 1$), 各屈服条件重合。

3-7 加载条件 (应力空间中的)

加载条件: 材料经受过塑性变形后的弹性响应的界限。

$$f(\sigma_{ij}, \xi_\beta) = 0 \quad (\text{注: 含内变量, 因为塑性变形历史会改变材料内部的微观结构。})$$

加载曲面 (后继屈服面): 加载条件 $f(\sigma_{ij}, \xi_\beta) = 0$ 在应力空间中以 ξ_β 为参数的曲面。

在 $\xi_\beta = 0$ 时, 加载曲面就是屈服曲面。

一致性条件: 在材料的弹-塑性加载过程中, 加载曲面满足

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} + \frac{\partial f}{\partial \xi_\beta} \dot{\xi}_\beta = 0$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{应力在加载面上时, } f(\sigma_{ij}, \xi_\beta) = 0 \\ \text{继续加载时, } f(\sigma_{ij} + d\sigma_{ij}, \xi_\beta + d\xi_\beta) = 0 \\ \text{相比较可得一致性条件。} \end{array} \right)$$

① 等向强化模型

模型: 加载曲面是屈服曲面在应力空间中的相似扩大。

$$f(\sigma_{ij}, \xi_\beta) = f^*(\sigma_{ij}) - \psi(\xi) = 0$$

其中, 常取 $d\xi$ 为等效塑性应变增量 $d\bar{\epsilon}^p$ 或塑性功增量 dW^p 。

Mises 等向强化屈服条件:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\sigma} = \psi(\xi) \\ \psi(0) = \sigma_s \end{array} \right.$$

其中 ψ 的形式可由简单拉伸实验确定。

Tresca 等向强化屈服条件:

$$\tau_{\max} = \psi(\xi)$$

其中 ψ 的形式可由简单拉伸实验确定。

在不卸载的情况下, 应变也可以取作内变量, $\psi(\xi)$ 能用 $\psi_c(\epsilon_c)$ 代替。其中 ψ_c 单调递增, ϵ_c 是一个特性应变, 常取为 $2|\epsilon|_{\max}$, ϵ 表示主应变。

② 随动强化模型

模型: 加载曲面就是屈服曲面随着塑性变形的过程, 在应力空间中的刚性移动。

$$f(\sigma_{ij}, \xi_p) = f^*(\sigma_{ij} - \alpha_{ij}) - \psi_0 = 0$$

其中内变量 α_{ij} 为移动张量 (或背应力), 表征加载曲面中心移动, 是个对称的二阶张量。

线性随动强化模型:

随动张量 α_{ij} 演化规律满足 $\dot{\alpha}_{ij} = c \dot{\epsilon}_{ij}^p$ ($c > 0$) 时, 随动强化模型称为线性随动强化模型。其中 c 是一个材料常数。

$$\text{加载条件为 } f(\sigma_{ij}, \xi_p) = f^*(\sigma_{ij} - c \epsilon_{ij}^p) - \psi_0 = 0$$

Mises 屈服条件线性随动强化模型:

$$\bar{\sigma}(\sigma_{ij} - c \epsilon_{ij}^p) = \sqrt{\frac{3}{2} (s_{ij} - c \epsilon_{ij}^p)(s_{ij} - c \epsilon_{ij}^p)} = \sigma_s$$

~~$$\text{简单拉伸时, } s_{11} = \frac{2}{3}\sigma, s_{22} = s_{33} = -\frac{1}{3}\sigma$$~~

~~$$\epsilon_{11}^p = \epsilon^p, \epsilon_{22}^p = \epsilon_{33}^p = -\frac{1}{2}\epsilon^p$$~~

注: 1° 这里假定塑性变形不引起体应变。

$$2^\circ \text{ 对于简单拉伸, } s_{11} = \frac{2}{3}\sigma, s_{22} = s_{33} = -\frac{1}{3}\sigma$$

$$\epsilon_{11}^p = \epsilon^p, \epsilon_{22}^p = \epsilon_{33}^p = -\frac{1}{2}\epsilon^p$$

$$\text{模型简化为 } \bar{\sigma} = \bar{\sigma}_s + \frac{3}{2} c \epsilon^p.$$

3° 上述模型又称为完全随动强化模型, 但 Mises 椭圆屈服曲线在 (σ_1, σ_2) 平面上并不是刚性平移。

在低维应力空间中屈服曲线作平移的模型称为简单随动强化模型。

注: 1° 以上两种模型的组合为 $f(\sigma_{ij}, \xi_p) = f^*(\sigma_{ij} - \alpha_{ij}) - \psi(\xi) = 0$.