大纲

Saint-Venant 问题

$$\iint_{\Omega}\frac{\partial\Psi}{\partial x_i}dxdy=\oint_{\partial\Omega}\Psi\cos\langle\vec{n}^{+},\vec{x}_i\rangle ds$$

（高斯公式的环路积分要标明外法向）

Prandtl 应力函数问题：

$$\begin{cases}\nabla^2\Psi=-2\\ \Psi|_{L_0}=0,\ \Psi|_{L_i}=C_i\quad (i=1,2,\cdots,m)\\ \oint_{L_i}\frac{d\Psi}{dn^{+}}ds=2A_i\quad (i=1,2,\cdots,m)\end{cases}$$

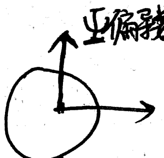
（位移单值性条件用来定常数 C_i）

$$D=2\left(\iint_G\Psi dxdy+\sum_{i=1}^{m}C_iA_i\right)$$

$$\alpha=\frac{M_z}{\mu D}$$

$$\tau_{zx}=\mu\alpha\frac{\partial\Psi}{\partial y},\quad \tau_{zy}=-\mu\alpha\frac{\partial\Psi}{\partial x}$$

Ψ偏导数 $\times\mu\alpha$



$$\tau_r=\mu\alpha\frac{\partial\Psi}{r\partial\theta},\quad \tau_\theta=-\mu\alpha\frac{\partial\Psi}{\partial r}$$

ψ：

$$\psi=\Psi+\frac{1}{2}(x^2+y^2)$$

$$\begin{cases}\frac{\partial\psi}{\partial x}=\frac{\partial\Psi}{\partial x}+x\\ \frac{\partial\psi}{\partial y}=\frac{\partial\Psi}{\partial y}+y\end{cases}$$

φ：
$$\begin{cases}\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial\psi}{\partial y}\\ \frac{\partial\varphi}{\partial y}=-\frac{\partial\psi}{\partial x}\end{cases}$$ （C-R方程）

$$\varphi=-\mathrm{Im}\{\psi(z,0)\}$$

翘曲函数问题

$$\begin{cases}\nabla^2\varphi=0\\ \frac{\partial\varphi}{\partial n}=y\cos\langle\vec{n},\hat{x}\rangle-x\cos\langle\vec{n},\hat{y}\rangle=(y,-x)\cdot\vec{n}\end{cases}$$

$$D=\iint_G\left(x^2+y^2+x\frac{\partial\varphi}{\partial y}-y\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)dxdy=\iint_G\left[x^2+y^2-(y,-x)\cdot\nabla\varphi\right]dxdy$$

位移场
$$\begin{cases}u_r=0\\ u_\theta=\alpha rz\\ u_z=\alpha\varphi\end{cases}$$

扭转刚度恒正。

（证明：$C_i>0$
Ψ的位移单值性条件）

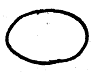
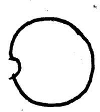
最大剪应力在边界上达到。

（证明：$\nabla^2(\tau^2)>0$）

~~考察含某等Ψ线的剪应力环量~~

$$\oint_{\text{等}\Psi\text{线}}\tau ds=2\mu\alpha A$$

（证明：与Ψ位移单值性条件一致）

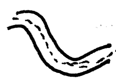
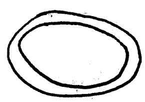
区域	Ψ
	$K\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)$
	$-\frac{1}{2}\cdot\frac{r+\delta}{r}\cdot(r-\delta)(r-2a\cos\theta)$

圆的扭转刚度 $D=\frac{\pi a^4}{2}$

$$\tau_{max}=\mu\alpha a$$

带圆槽圆杆

$$\tau_{max}\approx 2\mu\alpha a$$

区域	Ψ
	$\left(\frac{\delta}{2}\right)^2-\eta^2$
	$-\frac{2A}{l}\left(\eta-\frac{\delta}{2}\right)$

开口：$D=\frac{1}{3}l\delta^3$

$$\frac{D_{\text{开}}}{D_{\text{闭}}}\propto\left(\frac{\delta}{a}\right)^2$$

上下界定理

（证明：上界定理：

$I(\varphi)=D+I_1(\varphi)$

$I_1(\varphi)=0$

运用 $\begin{cases}\nabla^2\varphi=0\\ \frac{\partial\varphi}{\partial n}=(y,-x)\cdot\vec{n}\end{cases}$

$I(f)=I(\varphi)+0+(\geq 0)$

下界定理：

$J(\Psi)=D-J_1(\Psi)$

$J_1(\Psi)=0$

运用 $\begin{cases}\nabla^2\Psi=-2\\ \Psi|_{L_i}=C_i\\ \oint_{L_i}\frac{\partial\Psi}{\partial n^{+}}ds=2A_i\end{cases}$

$J(g)=J(\Psi)+0-(\geq 0)$

$$I_1(\varphi)=\iint_G\nabla\cdot\left[\nabla\varphi-(y,-x)\right]dxdy$$

$$J_1(\Psi)=\iint_G\nabla\cdot\left[\Psi(\nabla\Psi)\right]dxdy-2\sum_i C_iA_i$$

平面一直角

本构关系

$$\begin{cases}\varepsilon_x=\frac{1}{E}(\sigma_x-\nu\sigma_y)\\ \varepsilon_y=\frac{1}{E}(\sigma_y-\nu\sigma_x)\\ \varepsilon_{xy}=\frac{1+\nu}{E}\tau_{xy}\end{cases}$$

注:对平面应力问题,上式直接使用
对平面应变问题,作代换

$$\begin{cases}E'=\frac{E}{1-\nu^2}\\ \nu'=\frac{\nu}{1-\nu}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sigma_x=\frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x+\nu\varepsilon_y)\\ \sigma_y=\frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_y+\nu\varepsilon_x)\\ \tau_{xy}=\frac{E}{1+\nu}\varepsilon_{xy}\end{cases}$$

注:同上.

平衡方程

$$\begin{cases}\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+f_x=0\\ \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+f_y=0\end{cases}$$

应变协调方程

$$\varepsilon_{xx,yy}+\varepsilon_{yy,xx}=2\varepsilon_{xy,xy}$$

应力协调方程 ($\vec{f}$ = 常量)

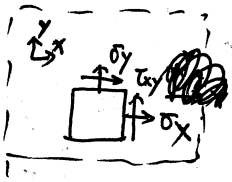
$$\nabla^2(\sigma_x+\sigma_y)=0$$

平面应力问题与平面应变问题基本方程组的差异:

平面应力	平面应变
	本构关系 $\sigma_z=\nu(\sigma_x+\sigma_y)$
应变协调方程 $\varepsilon_{zz,xx}=\varepsilon_{zz,yy}=\varepsilon_{zz,xy}=0$	—
—	几何方程 $\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x}=\varepsilon_x\\ \frac{\partial v}{\partial y}=\varepsilon_y\end{cases}$

应力与应力函数间关系

$$\begin{cases}\sigma_x=\frac{\partial^2U}{\partial y^2}\\ \sigma_y=\frac{\partial^2U}{\partial x^2}\\ \tau_{xy}=-\frac{\partial^2U}{\partial x\partial y}\end{cases}$$



平面问题的提法

$$\begin{cases}\nabla^2\nabla^2U=0 & (G)\\ \text{应力边条件} & (\partial G)\end{cases}$$

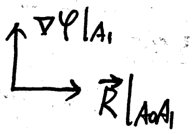
或

$$\begin{cases}\nabla^2\nabla^2U=0 & (G)\\ \text{应力函数边条件} & (\partial G)\end{cases}$$

应力函数 U 的性质:

1° 线性函数不影响应力场;
可以任取一个标准参考点 A_0

2° 应力函数梯度的边界值与边界段 A_0A_1 上的载荷主向量具有关系



3° 应力函数的边界值与边界段 A_0A_1 上的主矩(以 A_1 为参考点)相等。

$$\varphi|_{A_1}=M_1$$

注:① 应用条件 1° Oxy 为右手系
2° 从 A_0 点逆时针转到 A_1 点.
② 如果用右手系顺时针转,则上述结论 2°, 3° 反号.

若应力边条件为

$$\begin{cases}\vec{f}=(f_x,f_y)=\text{常值}\\ \vec{t}=(t_x,t_y)\end{cases}$$

则问题分解为

(1) $\begin{cases}\vec{f}^{(1)}=(f_x,f_y)\\ \vec{t}^{(1)}=(\tilde{t}_x,\tilde{t}_y)\end{cases}$

特解 $\begin{cases}\sigma_x=-f_xx\\ \sigma_y=-f_yy\\ \tau_{xy}=0\end{cases}$ $\begin{cases}\sigma_x=0\\ \sigma_y=0\\ \tau_{xy}=-f_xy-f_y\end{cases}$

(满足平衡方程和应力协调方程)
$\nabla^2(\sigma_x+\sigma_y)=0$

应力边条件由特解决定.

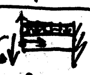
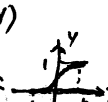
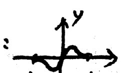
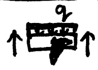
(2) $\begin{cases}\vec{f}^{(2)}=0\\ \vec{t}^{(2)}=(t_x-\tilde{t}_x,t_y-\tilde{t}_y)\end{cases}$

可用一般平面问题的解法做

平面一直角问题的备选解决方案:

1° 应力函数边值问题

2° 应力函数形式 → 应力场 → 定常数

问题	应力函数
 M, P, q	$C_1(M+Px+\frac{1}{2}qx^2)f(y)+C_2qg(y)$ 其中: $f(y)$:  $-\frac{h}{2}$, $\frac{h}{2}$, 三次 $g(y)$:  $-\frac{h}{2}$, $\frac{h}{2}$, 五次 $g(y)=y(y-\frac{h}{2})^2(y+\frac{h}{2})^2$
 q	$\frac{x^2}{2}f_2(y)+xf_1(y)+f_0(y)$ $(\sigma_y=f_2(y))$
	$P_3(x,y)$ (应力为线性函数)

平面-极坐标

几何方程

$$\begin{cases}\varepsilon_r = \dfrac{\partial u_r}{\partial r}\\[4pt] \varepsilon_\theta = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \dfrac{u_r}{r}\\[4pt] \varepsilon_{r\theta} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_\theta}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u_r}{\partial \theta} - \dfrac{u_\theta}{r}\right)\end{cases}$$

平衡方程

$$\begin{cases}\dfrac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \dfrac{\sigma_r-\sigma_\theta}{r} + f_r = 0\\[4pt] \dfrac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \dfrac{2\tau_{r\theta}}{r} + f_\theta = 0\end{cases}$$

本构关系

$$\begin{cases}\varepsilon_r = \dfrac{1}{E}(\sigma_r - \nu\sigma_\theta)\\[4pt] \varepsilon_\theta = \dfrac{1}{E}(\sigma_\theta - \nu\sigma_r)\\[4pt] \varepsilon_{r\theta} = \dfrac{1+\nu}{E}\tau_{r\theta}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sigma_r = \dfrac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_r + \nu\varepsilon_\theta)\\[4pt] \sigma_\theta = \dfrac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_\theta + \nu\varepsilon_r)\\[4pt] \tau_{r\theta} = \dfrac{E}{1+\nu}\varepsilon_{r\theta}\end{cases}$$

注：对平面应变问题，同样作代换。

应力协调方程

$$\nabla^2(\sigma_r + \sigma_\theta) = 0$$

应力与应力函数间关系：

$$\begin{cases}\sigma_r = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial U}{\partial r}\\[4pt] \sigma_\theta = \dfrac{\partial^2 U}{\partial r^2}\\[4pt] \tau_{r\theta} = -\dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial U}{\partial \theta}\right)\end{cases}$$

平面问题的提法

$\begin{cases}\nabla^2\nabla^2 U = 0 & (G)\\ \text{应力边条件} & (\partial G)\end{cases}$ （主要）

$\begin{cases}\nabla^2\nabla^2 U = 0 & (G)\\ \text{应力函数边条件} & (\partial G)\end{cases}$ （偶尔）

① 轴对称应力问题（厚壁圆筒；曲梁纯弯曲）

$U = U(r)$ ⟨0,0⟩

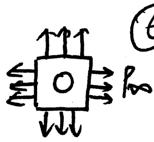
通解 $U = A + B\ln r + Cr^2 + Dr^2\ln r$

应力场
$$\begin{cases}\sigma_r = \dfrac{B}{r^2} + D(1+2\ln r) + 2C\\[4pt] \sigma_\theta = -\dfrac{B}{r^2} + D(3+2\ln r) + 2C\\[4pt] \tau_{r\theta} = 0\end{cases}$$

几何、受力/几何约束轴对称时的

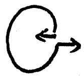
应力场
$$\begin{cases}\sigma_r = \dfrac{B}{r^2} + 2C\\[4pt] \sigma_\theta = -\dfrac{B}{r^2} + 2C\\[4pt] \tau_{r\theta} = 0\end{cases}$$

位移场（不考虑刚体位移）
$$\begin{cases}u_r = \dfrac{1}{E}\left[-(1+\nu)\dfrac{B}{r} + 2(1-\nu)Cr\right]\\[4pt] u_\theta = 0\end{cases}$$

有圆孔的无限大板双向拉伸 

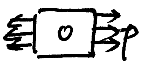
应力场：
$$\begin{cases}\sigma_r = \left(1 - \dfrac{a^2}{r^2}\right)P_\infty\\[4pt] \sigma_\theta = \left(1 + \dfrac{a^2}{r^2}\right)P_\infty\\[4pt] \tau_{r\theta} = 0\end{cases}$$

$k = 2$

② 曲梁受切向力 

$U = f(r)\sin\theta$ ⟨1,−1⟩

通解 $U = (Ar + Br^{-1} + Cr^3 + Dr\ln r)\sin\theta$

③ 有圆孔的无限大板单向拉伸 

$U = f(r)\cos 2\theta$ ⟨2,−2⟩

通解 $U = (Ar^2 + Br^{-2} + Cr^4 + D)\cos 2\theta$

内边界 $r=a$ 上的环向应力

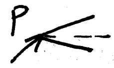
$$\sigma_\theta = p(1 - 2\cos 2\theta)$$

$k = 3$

④ 楔体受集中力偶 

$U = U(\theta)$

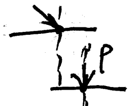
通解 $U(\theta) = A + B\theta + C\cos 2\theta + D\sin 2\theta$

⑤ 楔体受集中力 

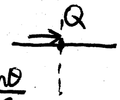
$U = rf(\theta)$

通解 $U = r(A\cos\theta + B\sin\theta + C\theta\cos\theta + D\theta\sin\theta)$

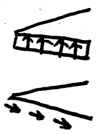
Boussinesq问题：

1° 力垂直边界 

$$\begin{cases}\sigma_r = -\dfrac{2P\cos\theta}{\pi r}\\[4pt] \sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0\end{cases}$$

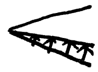
2° 力平行于边界 

$$\begin{cases}\sigma_r = -\dfrac{2P\sin\theta}{\pi r}\\[4pt] \sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0\end{cases}$$

⑥ 楔体受均布力 

$U = r^2 f(\theta)$

通解 $U = r^2(A + B\theta + C\cos 2\theta + D\sin 2\theta)$

⑦ 楔体受线性分布力 

$U = r^3 f(\theta)$

（或用三角形水坝的解）

通解：$U = r^3(A\cos\theta + B\sin\theta + C\cos 3\theta + D\sin 3\theta)$

积分表

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C$$

$$\int \ln x \, dx = x(\ln x - 1) + C$$