1) 非齐次线性微分方程组

朗斯基行列式：n阶齐次线性微分方程组的n个线性无关解排列的行列式。

$$W(x) \equiv \begin{vmatrix} y_{11}(x) & y_{12}(x) & \cdots & y_{1n}(x) \\ y_{21}(x) & y_{22}(x) & \cdots & y_{2n}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{n1}(x) & y_{n2}(x) & \cdots & y_{nn}(x) \end{vmatrix}$$

定理6.2. n阶齐次线性微分方程组的基本解组线性无关 $\Longleftrightarrow$ $W(x_0) \neq 0$ $(x_0 \in (a,b))$

定理6.3 设$\Phi(x)$是$\frac{d\vec{y}}{dx} = A(x)\vec{y}$的一个基解矩阵，则非齐次线性微分方程组$\frac{d\vec{y}}{dx} = A(x)\vec{y} + \vec{f}(x)$在区间$(a,b)$上的通解可以表示为

$$\vec{y} = \Phi(x)\left(\vec{c} + \int_{x_0}^{x} \Phi^{-1}(s)\vec{f}(s)\,ds\right)$$

满足初值条件$\vec{y}(x_0) = \vec{y}_0$的解为

$$\vec{y} = \Phi(x)\Phi^{-1}(x_0)\vec{y}_0 + \Phi(x)\int_{x_0}^{x} \Phi^{-1}(s)\vec{f}(s)\,ds$$

② 常系数线性微分方程组

$$\frac{d\vec{y}}{dx} = A\vec{y} + \vec{f}(x)$$

矩阵的指数函数：$e^{A} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$

定理6.4. 矩阵指数函数$\Phi(x) = e^{xA}$是常系数齐次线性微分方程组$\frac{d\vec{y}}{dx} = A\vec{y}$的一个标准基解矩阵$(\Phi(0) = E)$.

矩阵指数函数的形式：若$A = PJP^{-1}$，

J由m个若当块组成，且第i个若当块是n_i阶的，

则$e^{A} = Pe^{J}P^{-1}$，其中$e^{J} = \begin{pmatrix} e^{J_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{J_m} \end{pmatrix}$，

$$e^{J_i} = e^{\lambda_i}\begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2!} & \cdots & \frac{1}{(n_i-1)!} \\ & 1 & 1 & \cdots & \frac{1}{(n_i-2)!} \\ & 0 & \ddots & \ddots & \cdots \\ & & & \ddots & 1 \end{pmatrix}$$

定理6.6 设 n 阶实常数矩阵 A 在 $\mathbb{C}$ 中的互异的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$，且相应的(代数)重数分别为 $n_1, n_2, \cdots, n_s$，

则常系数齐次线性微分方程组 $\frac{d\vec{y}}{dx}=A\vec{y}$ 有基解矩阵

$$\Phi(x)=\left(e^{\lambda_1 x}\vec{p}_1^{(1)}(x), \cdots, e^{\lambda_1 x}\vec{p}_{n_1}^{(1)}(x); \cdots; e^{\lambda_s x}\vec{p}_1^{(s)}(x), \cdots, e^{\lambda_s x}\vec{p}_{n_s}^{(s)}(x)\right)$$

其中 $\vec{p}_j^{(i)}(x)=\vec{r}_{j0}^{(i)}+\frac{x}{1!}\vec{r}_{j1}^{(i)}+\frac{x^2}{2!}\vec{r}_{j2}^{(i)}+\cdots+\frac{x^{n_i-1}}{(n_i-1)!}\vec{r}_{j\,n_i-1}^{(i)}$

$\vec{r}_{10}^{(i)}, \cdots, \vec{r}_{n_i0}^{(i)}$ 是方程组 $(A-\lambda_i E)^{n_i}\vec{r}=\vec{0}$ 的 n_i 个线性无关解，

$$\vec{r}_{jk}^{(i)}=(A-\lambda_i E)^k\vec{r}_{j0}^{(i)} \quad (k=1, \cdots, n_i-1)$$

如果该基解矩阵有复值解，则必存在一个共轭的复值解，且它们的实部和虚部都是原方程组的实值解。

③ 高阶线性微分方程

定理6.3* 设 $\varphi_1(x), \cdots, \varphi_n(x)$ 是 n 阶齐次线性微分方程在 (a,b) 上的一个基本解组，则对应的非齐次线性微分方程有特解

$$\varphi^*(x)=\sum_{k=1}^{n}\varphi_k(x)\cdot\int_{x_0}^{x}\frac{W_k(s)}{W(s)}f(s)\,ds$$

其中 $W(x)$ 是基本解组的朗斯基行列式，$W(x)=\begin{vmatrix}\varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \cdots & \varphi_n(x)\\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) & \cdots & \varphi_n'(x)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \varphi_1^{(n-1)}(x) & \varphi_2^{(n-1)}(x) & \cdots & \varphi_n^{(n-1)}(x)\end{vmatrix}$

$W_k(x)$ 是以 $(0,0,\cdots,0,1)^T$ 替换 $W(x)$ 的第 k 列得到的行列式。

④ 常系数高阶线性微分方程

定理 6.6* 设常系数齐次线性微分方程 $y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}y'+a_ny=0$ 的特征方程 $\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n=0$ 在 $\mathbb{C}$ 中共有 s 个互不相同的根 $\lambda_1,\cdots,\lambda_s$，且相应的(代数)重数分别为 $n_1,\cdots,n_s$. 则微分方程有一个基本解组

$$\begin{cases} e^{\lambda_1x},\ xe^{\lambda_1x},\ \cdots,\ x^{n_1-1}e^{\lambda_1x}; \\ \cdots\cdots \\ e^{\lambda_sx},\ xe^{\lambda_sx},\ \cdots,\ x^{n_s-1}e^{\lambda_sx}. \end{cases}$$

待定系数法：若 $f(x)=P_m(x)e^{\mu x}$，则

1° 当 μ 不是齐次微分方程特征根时，非齐次微分方程有如下形式特解：

$$\varphi^*(x)=Q_m(x)e^{\mu x}$$

2° 当 μ 是 k 重特征根时，

$$\varphi^*(x)=x^kQ_m(x)e^{\mu x}$$

若 $f(x)=[A_m(x)\cos(\beta x)+B_\ell(x)\sin(\beta x)]e^{\alpha x}$，$\alpha+i\beta$ 是齐次微分方程的 k 重特征根，则

$$\varphi^*(x)=x^k[C_n(x)\cos(\beta x)+D_n(x)\sin(\beta x)]e^{\alpha x}$$

其中 $n=\max\{m,\ell\}$.