NO.

Date

复习笔记

第三章 扭转

1、假设

① ~~平~~截面假定：对圆截面而言，假设所有横截面像刚性平面一样绕杆的轴线转动，半径保持直线，横截面保持圆形。

② 刚周边假设：对非圆截面而言，假设其横截面在 y-z 平面上的投影作刚性转动。

2、应力与变形关系（轴）

(几何方程) 比扭转角与扭转角关系：1° $\theta \equiv \frac{d\varphi}{dx}$ 2° $\Delta\varphi = \int_0^x \frac{M_x}{GI_p}dx$

切应变 $\gamma = \theta\rho$，扭矩 $M_x = \int_A \tau \cdot \rho dA = G\theta I_p$

其中：极惯性矩 $I_p \equiv \int_A \rho^2 dA$，特别的，对于圆：$I_p = \frac{\pi}{32}D^4$

$\therefore \theta = \frac{M_x}{GI_p}$

(本构方程) 扭转角与扭矩关系：$\Delta\varphi = \frac{M_x l}{GI_p}$

扭转刚度 $k \equiv \frac{GI_p}{l}$，则 $\Delta\varphi = \frac{1}{k}M_x$

(平衡方程) 扭矩与线力矩载荷关系：1° $\frac{dM_x}{dx} + m(x) = 0$

2° $M_x(x) = M_x(0) - \int_0^x m(x)dx$

3、应力与变形关系（闭口薄壁截面直杆、开口薄壁截面直杆）

自由扭转：杆的截面上没有正应力，只有切应力。

（效果：所有截面翘曲程度相同，轴向纤维不伸缩。）

约束扭转：杆的截面上除了切应力，还有正应力。

剪力流定理：切应力与壁厚的乘积为常数。

$\tau h = constant$

① 比扭转角与扭矩关系：$\theta = \frac{M_x}{GC}$
(本构方程)

其中截面几何刚度系数 $C \equiv \frac{4A_m^2}{\oint \frac{ds}{h}}$，$A_m$：截面中线围成面积

扭矩：1° $dM_x = (\tau h)\rho ds$，2° $M_x = \tau h \cdot 2A_m$

切应变：$\gamma = \gamma' + \gamma'' = \theta\rho\cos\alpha + \frac{du}{ds}$

（其中 α：截面点位移与周边切线的夹角，$u(s)$：各点轴向位移。）

切应力环流：$\oint \tau ds = G\oint \gamma ds = G\theta \cdot 2A_m$

No.

Date

② 比扭转角与扭矩关系：$\theta = \frac{M_x}{GC}$
(本构方程)

其中截面几何刚度系数 $C \equiv \frac{1}{3}S_m h^3$

切应力：$\tau = 2G\theta y$ $\left(\theta = \frac{1}{2GA_m}\oint \tau ds = \frac{\tau}{2Gy}\right)$

扭矩：1° $dM_x = \frac{4GA_m^2}{\oint \frac{ds}{dy}}\theta = 8G S_m y^2 \theta dy$

2° $M_x = \frac{1}{3}GS_m h^3\theta$

最大切应力：$\tau_{max} = \left(\frac{2M_x y}{C}\right)_{max} = \frac{M_x h}{C}$

4、强度和刚度计算

强度条件：$\tau_{max} = \frac{(M_x)_{max}}{W_p} \le [\tau]$

其中 W_p：抗扭截面系数 (圆：$W_p = \frac{1}{16}\pi D^3$，闭口：$W_p = 2A_m (h)_{min}$)

量纲：$[长度]^3$ (开口：$W_p = \frac{1}{3}S_m h^2$，开口系：$W_p = \frac{\Sigma S_m h_i^3}{3h_{max}}$)

刚度条件：$\theta_{max} = \frac{(M_x)_{max}}{GC} \le [\theta]$

其中 C：截面几何刚度系数 (圆：$I_p = \frac{1}{32}\pi D^4$，闭口：$C = \frac{4A_m^2}{\oint \frac{ds}{h}}$)

量纲：$[长度]^4$ (开口：$C = \frac{1}{3}S_m h^3$)

5、应用问题

① 轴的动力传递：已知轴的传递功率 $P = N_k$ (kW)，转速 n (转/分)

则轴每分钟作功 $W = 1000 \times N_k \times 60$ (J)

又 $W = \frac{\alpha T}{t} = T\omega = 2\pi n T$ (J/分)

故力矩 $T = \frac{60 \times 1000 \times N_k}{2\pi n}$

② 密圈螺旋弹簧计算：假设 $D \gg d$，簧杆斜度 $\alpha < 5°$

1° 则簧杆内的应力：(不计剪力Q) $\tau'_{max} = \frac{M_x}{W_p} = \frac{8PD}{\pi d^3}$

(计剪力Q) $\tau_{max} = \frac{8PD}{\pi d^3}\left(1 + \frac{d}{2D}\right)$

2° 由 $\frac{P\Delta}{2} = \frac{1}{2}M_x\varphi = \frac{1}{2}\frac{M_x^2 l}{GI_p}$

则弹簧变形 $\Delta = \frac{64PR^3 n}{Gd^4}$，

弹簧刚度 $k = \frac{P}{\Delta} = \frac{Gd^4}{64R^3 n}$