(工程) 弹性力学

助教：罗青
qingfeng_luo@163.com
13691028379
力学楼 312.

ch.1 向量和张量.

向量定义：1. 几何定义：有向线段
2. 代数定义：在不同坐标系下的坐标间的关系为变换系数 C_{ij} 的一次齐次式的量。

计算：$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$

Einstein 约定求和：$\vec{a} = a_i\vec{e_i}$; $a_i' = C_{ij}a_j$

$\vec{e_i}' = C_{ij}\vec{e_j}$; $\vec{e_i} = C_{ji}\vec{e_j}'$

(Kronecker 记号) "换标记号" $\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i\neq j \\ 1, & i=j \end{cases}$

$\delta_{ii} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 3$

(Levi-Civita 记号) $\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{偶排列} \\ -1, & \text{奇排列} \\ 0, & \text{有相同指标} \end{cases}$

$\varepsilon_{ijk} = (\vec{e_i}\times\vec{e_j})\cdot\vec{e_k} = \begin{vmatrix} e_{i1} & e_{i2} & e_{i3} \\ e_{j1} & e_{j2} & e_{j3} \\ e_{k1} & e_{k2} & e_{k3} \end{vmatrix}$

(Levi-Civita 记号与基矢量的混合积及其行列式表达等价)

注：1° 在本课程里，矢量用小写，张量用大写，都用单箭头标记。

2° 在标准正交基下，坐标系与其对偶空间重合，不用区分向量的协变、共变性.

3° 对曲线坐标系，∇ 算符中 $\vec{e_i}$ 为单位基矢量，故应除以其拉梅系数.

$$\nabla = \frac{\vec{e_i}}{h_i}\partial_i$$

哑指标只在重复二次时表示求和.

$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$ —— 内积的张量表示

$\vec{e}_i \times \vec{e}_j = \varepsilon_{ijk} \vec{e}_k$ —— 外积的张量表示

$\varepsilon_{pij} \varepsilon_{pkl} = \delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}$ （证明见书 P8） —— ε记号与δ记号间关系（减降连续 ε 记号的公式）

$\det(C_{ij}) = \varepsilon_{ijk} C_{1i} C_{2j} C_{3k} = \frac{1}{6} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{plm} C_{pi} C_{lj} C_{mk}$

1.2 张量

（在坐标变换下，坐标间关系是变换系数 C_{ij} 的二次齐次式的量）（也叫二阶张量）

1. 定义：$\vec{A} = A_{ij} \vec{e}_i \vec{e}_j$

$\vec{A} = A'_{kl} \vec{e}'_k \vec{e}'_l$

$\begin{cases} \vec{e}'_i = C_{ij} \vec{e}_j \\ \vec{e}_i = C_{ji} \vec{e}'_j \end{cases}$

$[A'] = [C][A][C]^T$ —— 合同变换

$\underline{A'_{ij} = C_{ik} C_{js} A_{ks}}$ (定义式)

$\vec{I} = \vec{e}_i \vec{e}_i$

2. 张量运算：$\vec{A} \pm \vec{B} = (A_{ij} \pm B_{ij}) \vec{e}_i \vec{e}_j$

(迹) $J(\vec{A}) = A_{ii}$

$\vec{A}^T = A_{ji} \vec{e}_i \vec{e}_j$

反对称张量：$\begin{pmatrix} 0 & A_{12} & A_{13} \\ -A_{12} & 0 & A_{23} \\ -A_{13} & -A_{23} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -w_3 & w_2 \\ w_3 & 0 & -w_1 \\ -w_2 & w_1 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} A_{ij} = -\varepsilon_{ijk} w_k \\ w_k = -\frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} A_{ij} \end{cases}$

3. 张量和向量运算

$\vec{a} \cdot \vec{A} = \cancel{a_i A_{ik} \vec{e}_k} (a_i \vec{e}_i) \cdot (A_{jk} \vec{e}_j \vec{e}_k) = a_i A_{ik} \vec{e}_k$

$\vec{A} \cdot \vec{a} = A_{ij} a_j \vec{e}_i$

$\vec{a} \times \vec{A} = \varepsilon_{ijl} a_i A_{jk} \vec{e}_l \vec{e}_k$

$\vec{a} \cdot \vec{A} \cdot \vec{b} = a_i A_{ij} b_j$

4. 张量间运算

$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_{ij} B_{jk} \vec{e}_i \vec{e}_k$

$\vec{A} : \vec{B} = (A_{ij} \vec{e}_i \vec{e}_j) \odot (B_{kl} \vec{e}_k \vec{e}_l) = A_{ij} B_{ji}$ （先算下面的符号）

$(\vec{e}_i \vec{e}_j : \vec{e}_k \vec{e}_s = (\vec{e}_i \cdot \vec{e}_s)(\vec{e}_j \cdot \vec{e}_k))$

$$\vec{A}\overset{\cdot}{\times}\vec{B} = A_{ij}B_{jl}\varepsilon_{ilm}\vec{e}_m$$

$$\vec{A}\overset{\times}{\cdot}\vec{B} = A_{ij}B_{ki}\varepsilon_{jkp}\vec{e}_p$$

$$\vec{A}\overset{\times}{\times}\vec{B} = A_{ij}B_{ks}\varepsilon_{isp}\varepsilon_{jkq}\vec{e}_p\vec{e}_q$$

$$\vec{A}:\vec{B} = \vec{B}^T:\vec{A}^T$$

5.定理：

1° $\vec{A}$,$\vec{B}$对称，则 $\vec{A}:\vec{B} = \vec{B}:\vec{A}$

2° $\vec{A}$对称，$\vec{B}$反对称，则 $\vec{A}:\vec{B}=0$

3° $\vec{A}$反对称，则 $\vec{A}\cdot\vec{a} = \vec{\omega}\times\vec{a}$

4° $\vec{A}$对称 $\Leftrightarrow$ $\vec{A}\overset{\times}{\cdot}\vec{I}=0$

5° $\vec{A}=0$ $\Leftrightarrow$ $\vec{I}\overset{\times}{\times}\vec{A}=0$

1-3 向量分析

1. Hamilton 算子（直角坐标系下）

$$\nabla = \vec{e}_i\partial_i$$

$$\nabla = \vec{e}_i{}'\frac{\partial}{\partial x_i'} = c_{ij}\vec{e}_j\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial x_i'} = \vec{e}_k\partial_k$$

2. 梯度、散度、旋度

$$\nabla\varphi = \varphi\nabla = \vec{e}_i\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}$$

$$\nabla\cdot\vec{a} = \frac{\partial a_i}{\partial x_i} = a_{i,i}$$
$$= \vec{a}\cdot\nabla$$

$$\nabla\times\vec{a} = \frac{\partial a_j}{\partial x_i}\varepsilon_{ijk}\vec{e}_k$$
$$= -\vec{a}\times\nabla$$ （矢量的左右旋度反号）

$$\nabla^2\varphi = \varphi_{,ii}$$

3. 积分公式

Gauss: $\iiint_\Omega \nabla\cdot\vec{a}\,dv = \oint_{\partial\Omega}\vec{a}\cdot d\vec{s}$

Stokes: $\iint_S (\nabla\times\vec{a})\cdot d\vec{s} = \oint_{\partial S}\vec{a}\cdot d\vec{l}$

Green: $\iint_S \nabla\cdot\vec{a}\,ds = \oint_{\partial S}\vec{a}\cdot\vec{n}\,dl$ $\left(\vec{n} = \left(\frac{dy}{dl}, \frac{dx}{dl}\right)\right)$

无旋场
4. 和无源场.

($\vec{a}$定义在单连通区域Ω上)

定理1: $\nabla\times\vec{a}=0 \Leftrightarrow \exists\varphi,\ \vec{a}=\nabla\varphi$

(前提同上)

定理2: $\nabla\cdot\vec{a}=0 \Leftrightarrow \exists\vec{b},\ \vec{a}=\nabla\times\vec{b}$

证明: 1° "$\Leftarrow$"
$$\nabla\times(\nabla\varphi)=\partial_i\vec{e}_i\times(\partial_j\vec{e}_j\varphi)$$
$$=\varepsilon_{ijk}\vec{e}_k\ \varphi_{,ij}$$
$$=0\quad(\because \varphi_{,ij}=\varphi_{,ji})$$

"$\Rightarrow$"
$$\varphi(\vec{r})=\int_{r_0}^{r}\vec{a}\cdot d\vec{r}$$

2° "$\Leftarrow$"
$$\nabla\cdot(\nabla\times\vec{b})=\partial_i\vec{e}_i\cdot(\partial_j\vec{e}_j\times b_k\vec{e}_k)$$
$$=\varepsilon_{jki}\ b_{k,ij}$$
$$=0$$

"$\Rightarrow$"
$$\begin{cases} b_1=\int_{z_0}^{z}a_2(x,y,\zeta)d\zeta \\ b_2=-\int_{z_0}^{z}a_1(x,y,\zeta)d\zeta+\int_{x_0}^{x}a_3(\xi,y,z_0)d\xi \\ b_3=0\end{cases}$$
$$\vec{b}=(b_1,b_2,b_3),\quad \vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$$

注: 定理2的"$\Rightarrow$"部分对区域Ω性质有更强的限制,
详见 Stevenson (1954)的论文.(教材注[128]).

5. Helmholtz分解

定理: 区域Ω上, $\forall$场$\vec{a}$, $\exists$ 标量势φ和矢量势$\vec{b}$, st.
$$\vec{a}=\nabla\varphi+\nabla\times\vec{b}\quad 且\ \nabla\cdot\vec{b}=0$$

1.4 张量分析

1. 向量梯度
$$\nabla\vec{a}=a_{j,i}\ \vec{e}_i\vec{e}_j$$
$$\vec{a}\nabla=a_{i,j}\ \vec{e}_i\vec{e}_j \quad\Rightarrow\quad \nabla\vec{a}=(\vec{a}\nabla)^T$$

2、张量散度
$$\nabla\cdot\vec{A}=A_{ik,i}\ \vec{e}_k$$
$$\vec{A}\cdot\nabla=A_{ij,j}\ \vec{e}_i \quad\Rightarrow\quad \text{if } \vec{A}=\vec{A}^T,\ \nabla\cdot\vec{A}=\vec{A}\cdot\nabla$$

3. 张量旋度

$$\nabla\times\vec{A} = A_{jk,i}\,\varepsilon_{ijl}\,\vec{e}_l\vec{e}_k \qquad \Rightarrow \vec{A}\text{对称：}\ \mathbf{J}(\nabla\times\vec{A}) = \mathbf{J}(\vec{A}\times\nabla) = 0$$

$$\vec{A}\times\nabla = A_{ij,k}\,\varepsilon_{jkl}\,\vec{e}_i\vec{e}_l$$

4. 积分公式

$$\iiint_{\Omega} \nabla\cdot\vec{A}\, d\Omega = \oint_{\partial\Omega} (d\vec{s}\cdot\vec{A})$$

$$\iiint_{\Omega} \vec{A}\cdot\nabla\, d\Omega = \oint_{\partial\Omega} (\vec{A}\cdot d\vec{s})$$

$$\iint_{S} \vec{n}\cdot(\nabla\times\vec{A})\, ds = \oint_{\partial S} d\vec{l}\cdot\vec{A}$$

$$\iint_{S} (\vec{A}\times\nabla)\cdot\vec{n}\, ds = -\oint_{\partial S} \vec{A}\cdot d\vec{l}$$

证明：

$$\iiint_{\Omega} \nabla\cdot\vec{A}\, d\Omega = \left\{\iiint_{\Omega} \nabla\cdot\vec{a}_j\, d\Omega\right\}\vec{e}_j$$

$$= \left\{\oint_{\partial\Omega} \vec{a}_j\cdot d\vec{s}\right\}\vec{e}_j$$

$$= \oint_{\partial\Omega} d\vec{s}\cdot\vec{A}$$

其中 $\vec{a}_j = A_{ij}\vec{e}_i$. 其余证明类似.

记法：张量在 nabla 算子哪边，积出来就在微元（面元、线元）的哪边.

注：一般情况下，张量运算不满足交换律和结合律，运算顺序有严格定义。